Introduction aux équations aux dérivées partielles linéaires

par **Gérard DEBEAUMARCHÉ**
Ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Clemenceau de Reims

On se propose dans cet article de décrire quelques propriétés élémentaires des équations aux dérivées partielles (e.d.p.) linéaires du second ordre à coefficients constants, autrement dit, dans le cas de deux variables, des équations de la forme :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u = F(x,y) \qquad \text{(E)}$$

où a, b, c, α, β, γ désignent six nombres réels donnés (a, b, c étant non tous nuls), F une fonction continue de deux variables réelles définie sur un ouvert U du plan et u une fonction inconnue, supposée de classe C^2.

On distingue a priori deux types de problèmes :

— ceux dans lesquels n'intervient pas la variable temps t, et qui ne dépendent donc que des variables spatiales x, y, z ; ils sont appelés ***problèmes stationnaires*** *;*

— ceux dans lesquels intervient, en plus des variables spatiales x, y, z, la variable temps t ; ils sont appelés ***problèmes d'évolution.***

■ *On recherche le plus souvent des solutions vérifiant des conditions aux limites, signifiant que la solution considérée u, a priori définie sur l'ouvert U du plan, satisfait certaines conditions sur la frontière de U. On distingue à ce sujet deux types de conditions, celles de Dirichlet et de Neumann.*

Les ***conditions de Dirichlet*** *imposent à la solution u d'être continue sur l'adhérence de U, c'est-à-dire sur U et sa frontière, et d'être alors égale à une fonction donnée sur la frontière de U.*

Les ***conditions de Neumann*** *imposent à la solution u d'être continue sur l'adhérence de U, c'est-à-dire sur U et sa frontière, et d'admettre en tout point de la frontière de U une dérivée $\partial u/\partial N$ suivant le vecteur normal N orienté vers l'extérieur de la frontière de U (supposée suffisamment régulière) égale à une fonction donnée.*

Dans un problème d'évolution, on recherche de plus des solutions vérifiant certaines conditions initiales (ou ***conditions de Cauchy****), signifiant que, à l'instant t = 0, la solution u(x, y, z, t) de l'équation vérifie*

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

où f est une fonction donnée, et parfois

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = g(x, y, x)$$

où g est une fonction donnée.

■ *Les* ***problèmes que l'on peut*** *alors* ***étudier*** *sont les suivants.*

• Un problème stationnaire donné avec des conditions aux limites ou un problème d'évolution donné avec des conditions aux limites et des conditions initiales, admettent-ils une solution et une seule ?

• Dans l'affirmative, la solution obtenue dépend-elle continûment des données (autrement dit, une « petite » erreur commise sur les conditions aux limites ou sur les conditions initiales conduit-elle à une « petite » erreur sur la solution) ?

Notons dès maintenant que la linéarité de l'équation E implique que :

— les solutions de l'équation homogène (équation obtenue lorsque le second membre F est nul) forment un espace vectoriel ;

— la solution générale de l'équation complète s'obtient comme la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation homogène.

Cet article est introductif et ne fait appel qu'à des méthodes élémentaires. En particulier, il ne fait jamais référence à la théorie des distributions, cependant centrale dans toutes ces questions. De même, les méthodes numériques de résolution (par différences finies ou par éléments finis) dont l'importance est essentielle puisque la résolution analytique n'est pas praticable en général ne sont pas abordées ici.

On se reportera en bibliographie aux références [1] à [5].

1. Classification des e.d.p. linéaires du second ordre

Ce paragraphe est destiné à distinguer trois types d'équations, qui se révèlent différentes tant du point de vue mathématique (propriétés des solutions, méthodes de démonstration) que physique.

Étudions tout d'abord le cas des e.d.p. dépendant de deux variables réelles.

Définition 1.

L'équation aux dérivées partielles (E) donnée dans l'introduction :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u = F(x,y) \quad \textbf{(1)}$$

est dite de type :

— **hyperbolique** lorsque $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
— **parabolique** lorsque $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;
— **elliptique** lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Dans la suite, on dira que $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant de l'équation** (1).

Cette définition est intéressante car invariante par changement de bases dans le plan, comme on le vérifie en effectuant le changement de bases, défini par :

$$x' = Ax + By\ ;$$
$$y' = Cx + Dy\ ;$$

avec $AD - BC \neq 0$,

et en posant alors :

$$u'(x',y') = u'(Ax+By\ ,\ Cx+Dy) = u(x,y).$$

En calculant les dérivées partielles de u en fonction de celles de u', on voit alors que u est solution de (1) si, et seulement si, u' est solution de :

$$a'\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+b'\frac{\partial^2 u'}{\partial x'\partial y'}+c'\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}+\alpha'\frac{\partial u'}{\partial x'}+\beta'\frac{\partial u'}{\partial y'}+\gamma' u' = F'(x',y') \quad \textbf{(2)}$$

où l'on a notamment :

$$a' = aA^2 + bAB + cB^2\ ;$$
$$b' = 2(aAC + cBD) + b(AD + BC)\ ;$$
$$c' = aC^2 + bCD + cD^2.$$

On vérifie par le calcul que le discriminant de (2) est égal à $(AD - BC)^2(b^2 - 4ac)$. Il est donc du signe de $b^2 - 4ac$ et les équations (1) et (2) sont bien de même type.

Proposition 1.

A l'aide de changements de bases convenables et quitte à changer les notations, la recherche des solutions de l'équation aux dérivées partielles (1) *est équivalente à la recherche :*

1. *Des solutions de l'équation suivante dans le* ***cas hyperbolique*** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u = F(x,y)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u = F(x,y)\ ;$$

2. *Des solutions de l'équation suivante dans le* ***cas parabolique*** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u = F(x,y)\ ;$$

(On exclura le cas $\beta = 0$, qui ramène à une simple équation différentielle).

3. *Des solutions de l'équation suivante dans le* ***cas elliptique*** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u = F(x,y).$$

Démonstration. ◊ Établissons, par exemple, ce résultat dans le cas d'une équation elliptique.

D'après les calculs de changements de base effectués précédemment, il suffit de trouver A, B, C, D tels que :

$$aA^2 + bAB + cB^2 = aC^2 + bCD + cD^2\ ;$$
$$2(aAC + cBD) + b(AD + BC) = 0.$$

La première de ces relations est vérifiée en choisissant :

- $B = D = 1$;
- A, C de la forme $\frac{-b}{2a}+h$ et $\frac{-b}{2a}-h$.

La seconde équation est alors vérifiée pour $h^2 = (4ac - b^2)/4a^2$, expression positive puisque $\Delta < 0$ ici.

Comme $AD - BC = 2h \neq 0$, ce changement de variables ramène clairement une équation elliptique à la forme indiquée dans la proposition **1**. ◊

Proposition 2.

A l'aide de changements de fonctions inconnues convenables, la recherche des solutions de l'équation aux dérivées partielles (1) *est équivalente à la recherche :*

— *des solutions de l'équation suivante dans le* ***cas hyperbolique*** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+kv = G(x,y)$$

ou

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+kv = G(x,y)\ ;$$

— *des solutions de l'équation suivante dans le* ***cas parabolique*** :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+k\frac{\partial v}{\partial y} = G(x,y)\ ;$$

— *des solutions de l'équation suivante dans le* ***cas elliptique*** :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+kv = G(x,y)$$

Démonstration. ◊ Reprenons encore le cas d'une équation elliptique qui, d'après la proposition **1**, peut se ramener à la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u = F(x,y).$$

Posons alors

$$u(x,y) = v(x,y)\exp\left(-\frac{\alpha x+\beta y}{2}\right).$$

Un simple calcul de dérivées montre que l'équation précédente équivaut à la suivante :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+kv = F(x,y)\exp\left(\frac{\alpha x+\beta y}{2}\right).$$

Le résultat est donc établi, quitte à poser

$$G(x, y) = F(x, y) \exp\left(\frac{\alpha x + \beta y}{2}\right). \qquad \Diamond$$

Généralisation.

Soit une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants à n variables, qui s'écrit donc sous la forme suivante (avec, pour tout couple (i, j), $a_{ij} = a_{ji}$) :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = F(x_1, \ldots, x_n). \qquad \textbf{(3)}$$

Désignant par Q la forme quadratique

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_i \, x_j ,$$

on dira alors que cette équation (3) est :

— hyperbolique, si sa signature est de la forme $(p, n-p)$ avec $0 < p < n$;

— parabolique, si sa signature est de la forme (p, q) avec $p + q < n$;

— elliptique, enfin, si sa signature est $(n, 0)$ ou $(0, n)$.

(On rappelle que si (p, q) est la signature d'une forme quadratique, p et q sont respectivement les nombres des carrés précédés de signes + et – dans une décomposition en carrés de formes linéaires indépendantes).

On aborde maintenant quelques exemples illustrant ces trois types d'équation, l'équation des ondes, l'équation de la chaleur et l'équation de Laplace.

Les paragraphes 2, 3 et 4 sont effectivement consacrés à l'étude d'équations importantes sur le plan physique, l'ouvert U étant à chaque fois géométriquement simple afin de conduire les calculs à leur terme.

2. Une équation hyperbolique : l'équation des ondes

2.1 Équation des cordes vibrantes

Il s'agit de l'une des premières équations aux dérivées partielles mises en évidence.

Elle fut étudiée dès la première moitié du XVIII[e] siècle par d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où v désigne la vitesse de propagation de l'onde dans la corde et $u(x, t)$ l'ordonnée du point d'abscisse x de la corde à l'instant t (cette ordonnée étant mesurée par rapport à la position d'équilibre supposée d'ordonnée nulle).

2.1.1 Cas d'une corde infinie

On suppose la corde vibrante infinie, et on assimile la position d'équilibre de celle-ci à la droite réelle $\mathbb{R}$. On se propose d'étudier l'équation avec les **conditions initiales** suivantes, supposées réalisées pour tout nombre réel x :

$$u(x, 0) = f(x)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Ces conditions signifient que la corde a été lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position définie par la donnée de la fonction f, que l'on suppose de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (ou même de classe C^1 et de classe C^2 par morceaux).

En s'inspirant des changements de bases qui ont été réalisés au paragraphe 1, on considère les nouvelles variables :

$$X = x + vt \text{ et } T = x - vt$$

et l'on pose :

$$v(X, T) = v(x + vt\,,\; x - vt) = u(x, t).$$

Par un simple calcul de dérivées partielles, on constate que u satisfait l'équation des cordes vibrantes si, et seulement si, v vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \, \partial T} = 0.$$

Il en résulte que $\frac{\partial v}{\partial T}$ ne dépend pas de X, et donc que :

$$\frac{\partial v}{\partial T}(X, T) = a(T)$$

où a est une fonction de classe C^1.

Quitte à noter A une primitive de a, on obtient alors par une nouvelle intégration :

$$v(X, T) = A(T) + B(X)$$

où A et B sont donc deux fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On obtient, par conséquent :

$$u(x, t) = A(x - vt) + B(x + vt).$$

Réciproquement, il est immédiat de constater qu'une telle fonction est bien solution de l'équation des cordes vibrantes.

Tenant maintenant compte des deux conditions initiales, il vient :

$$A(x) + B(x) = f(x)$$

et

$$A'(x) - B'(x) = 0.$$

Il en résulte que

$$A'(x) = B'(x) = \frac{f'(x)}{2},$$

ce qui montre enfin que :

$$2A(x) = f(x) + \lambda \text{ et } 2B(x) = f(x) - \lambda$$

et

$$2B(x) = f(x) - \lambda$$

où λ désigne une constante réelle.

Ainsi, le problème posé admet **une solution et une seule**, donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - vt) + f(x + vt)).$$

Cette solution possède la remarquable **interprétation physique** suivante.

• Considérons uniquement le premier terme $f(x - vt)/2$. Celui-ci donne l'amplitude du mouvement d'une corde à l'instant t et à l'abscisse x, et l'on remarque que c'est la même amplitude que celle figurant à l'instant initial 0 à l'abscisse $x - vt$.

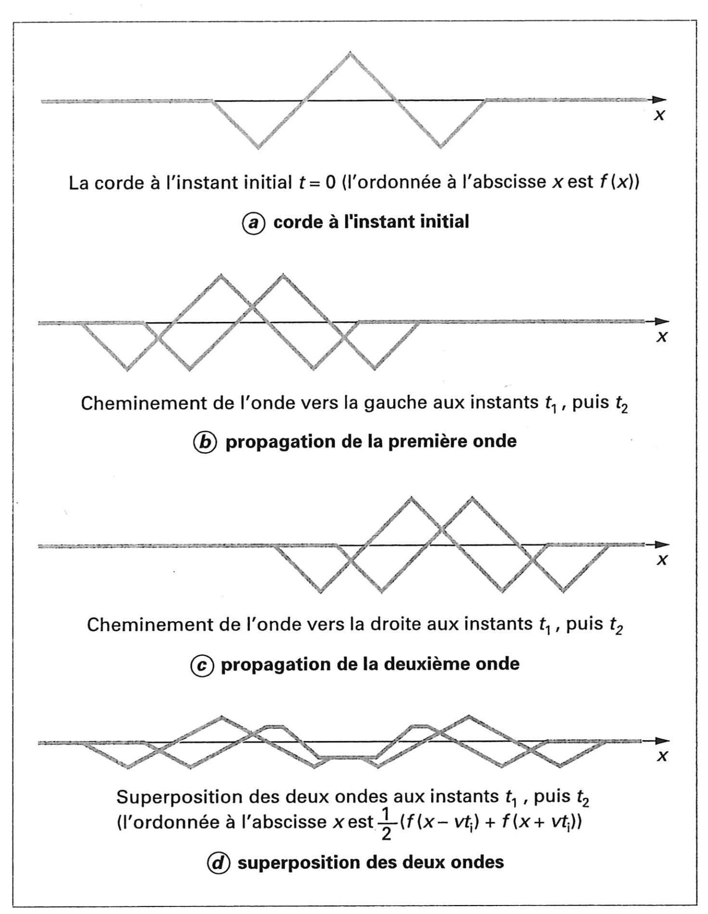


Figure 1 – Problème de la corde vibrante infinie

Ainsi, ce terme indique le cheminement d'une onde qui se déplace vers la droite à la vitesse v, puisque, entre les instants 0 et t, elle est passée de l'abscisse $x - vt$ à l'abscisse x.

● De même, le second terme $f(x + vt)/2$ indique le cheminement d'une onde qui se déplace vers la gauche à la même vitesse v.

Le problème de la corde vibrante infinie est représenté figure **1**.

2.1.2 Cas d'une corde finie

2.1.2.1 Présentation

On suppose la corde vibrante finie de longueur L, et on assimile la position d'équilibre de celle-ci au segment $[0, L]$. On se propose ici d'étudier l'équation avec :

— les **conditions initiales** suivantes, réalisées pour tout nombre réel x :

$$u(x, 0) = f(x)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

qui signifient que la corde a été lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position définie par la donnée de la fonction f, que l'on suppose de classe C^2 sur $[0, L]$ (ou même de classe C^1 et de classe C^2 par morceaux) ;

— les **conditions aux limites** suivantes, réalisées pour tout nombre réel positif t :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

qui signifient que la corde est fixée à ses deux extrémités.

Pour $\boldsymbol{t = 0}$, on a donc :

$$f(0) = f(L) = 0.$$

On étudie les problèmes d'existence et d'unicité de la solution u d'une telle e.d.p.

2.1.2.2 Unicité d'une éventuelle solution par considération de l'énergie

Supposons que l'on dispose de deux solutions u_1 et u_2 de l'équation (qui peut ici être homogène ou avec second membre, ce qui ne change rien à la démonstration), vérifiant les mêmes conditions initiales et les mêmes conditions aux limites.

Posons $u = u_1 - u_2$ et introduisons la fonction d'énergie suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2\right)\mathrm{d}x.$$

Les hypothèses faites autorisent la dérivation de E sous le signe intégral, et on a, puisque $u = u_1 - u_2$ est aussi solution de l'équation des cordes vibrantes :

$$E'(t) = \int_0^L\left(\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}(x, t)\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}(x, t)\right)\mathrm{d}x.$$

L'expression sous le signe intégral est une dérivée et on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) = 0$$

par dérivation des relations $u(0, t) = u(L, t) = 0$, ce qui donne :

$$E'(t) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right]_0^L = 0\,.$$

Par conséquent, la fonction $t \to E(t)$ est constante et, en fait, nulle puisque $E(0) = 0$. Cela résulte de l'expression de $E(0)$ et du fait que, u_1 et u_2 vérifiant les mêmes conditions initiales, leur différence u vérifie :

— d'une part, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$;

— d'autre part, $u(x, 0) = 0$

donc, par dérivation, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0$.

Puisque $E(t) = 0$, on a donc, pour $t \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant L$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0\,.$$

La fonction u est par conséquent constante sur $[0, L] \times [0, +\infty]$, et en fait nulle puisque $u(x, 0) = 0$. Ainsi, on a bien $u_1 = u_2$ et l'unicité annoncée.

2.1.2.3 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables

Indiquons tout d'abord l'idée de la **méthode.**

■ On commence par rechercher des solutions multiplicatives non nulles de la forme

$$(x, t) \to u(x)\ v(t)$$

qui vérifient les conditions aux limites vues paragraphe 2.1.2.1.

Ici, de telles solutions vérifient donc :

$$u(x)\,v''(t) = v^2 u''(x)\,v(t).$$

Puisque l'on recherche des solutions non nulles, il existe a priori des nombres réels x_0 et t_0 pour lesquels :

$$u(x_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad v(t_0) \neq 0 .$$

On en déduit, quitte à fixer $x = x_0$, puis $t = t_0$, l'existence de constantes λ et μ telles que l'on ait pour $t \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant L$:

$$u''(x) = \lambda u(x) \; ;$$

$$v''(t) = \mu v(t) .$$

En reportant réciproquement dans l'équation, on voit que, en fait :

$$\mu = v^2 \lambda$$

et pour tenir compte des conditons aux limites, il faut enfin bien sûr que :

$$u(0) = u(L) = 0.$$

(On est ainsi amené à résoudre un problème, ici très simple, de Sturm-Liouville (§ 5) ; on verra que cela est général dans cette méthode de séparation des variables).

- Si le nombre λ est **nul**, alors :

$$u(x) = Ax + B$$

et puisque $u(0) = u(L) = 0$, on a $A = B = 0$ et u est la solution nulle, ce qui est exclu.

- Si le nombre λ est **strictement positif**, on a :

$$u(x) = A\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)$$

et puisque $u(0) = u(L) = 0$, on a $A = B = 0$ et u est la solution nulle, ce qui est exclu.

- Si le nombre λ est **strictement négatif**, on a :

$$u(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

puisque $u(0) = 0$, on a $A = 0$ et puisque $u(L) = 0$, on a $B = 0$, donc encore $u = 0$, sauf s'il existe un nombre entier naturel non nul n tel que

$$\lambda = \frac{-n^2\pi^2}{L^2},$$

auquels cas on obtient alors les solutions suivantes :

$$u(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \; ;$$

$$v(t) = B_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + C_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right).$$

■ L'équation étant linéaire, les combinaisons linéaires des solutions précédentes sont encore solutions de l'équation. L'idée est de ne pas se borner nécessairement à des « combinaisons linéaires finies » pour obtenir une solution.

Posons donc, de façon purement formelle (on peut faire $A_n = 1$) :

$$u(x,t) = \sum \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(B_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + C_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)\right) .$$

Les conditions de Cauchy portant sur $u(x, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ seront formellement vérifiées en choisissant les coefficients C_n nuls et les coefficients B_n tels que :

$$f(x) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Un tel développement est celui d'une fonction impaire et $2L$-périodique sur $\mathbb{R}$, que l'on obtient en prolongeant la fonction f par imparité sur $[-L, L]$, puis par $2L$-périodicité. La fonction f ainsi prolongée est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Elle est a priori de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble $L\mathbb{Z}$ des multiples de L, sauf si elle vérifie la conditon supplémentaire

$$f''(0) = f''(L) = 0,$$

auquel cas elle est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

On en déduit qu'elle est développables en série de Fourier et que sa série de Fourier converge normalement vers f.

Si l'on pose pour $t \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant L$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right),$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

on voit que la série définissant u est normalement convergente sur $[0, L] \times [0, +\infty]$, donc continue, et l'on vérifie aisément, à l'aide des formules de trigonométrie et du développement en série de Fourier de f, que l'on a :

$$u(x,t) = \frac{[f(x+vt) + f(x-vt)]}{2}.$$

La fonction u obtenue ci-dessus est donc de classe C^2 sur $[0, L] \times [0, +\infty]$ et vérifie les conditions aux limites et les conditions initiales requises.

Elle est de plus de classe C^2 sur $[0, L] \times [0, +\infty]$ et solution de l'équation des cordes vibrantes si :

$$f''(0) = f''(L) = 0.$$

Sinon, elle n'est de classe C^2 et solution de l'équation des cordes vibrantes que sur l'ensemble $[0, L] \times [0, +\infty]$ privé des segments de droite d'équations

$$x \pm vt = kL$$

avec $t \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant L$ et $k \in \mathbb{Z}$.

1. La formule obtenue pour une corde finie (après avoir prolongé convenablement par imparité et périodicité la fonction f) est exactement l'analogue de la formule obtenue dans le cas d'une corde infinie (§ 2.1.1).

2. La solution u ainsi obtenue dépend continûment de la donnée initiale f. En effet, on remarque facilement que l'on a :

$$\|u\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty .$$

Supposons que la donnée initiale f ne soit connue que par une approximation $\underline{f}$.

Notons alors u et $\underline{u}$ les solutions associées à ces données initiales exactes et approchées f et $\underline{f}$ et

$$\Delta u = u - \underline{u} \quad \text{et} \quad \Delta f = f - \underline{f}$$

les erreurs. On a, par différence :

$$\Delta u(x,t) = \frac{[\Delta f(x+vt) + \Delta f(x-vt)]}{2}$$

et donc, de même :

$$\|\Delta u\|_\infty = \sup |u(x) - \underline{u}(x)| \leqslant \|\Delta f\|_\infty = \sup |f(x) - \underline{f}(x)|.$$

2.2 Généralisation : l'équation des ondes en dimension *n*

Il s'agit de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right).$$

Ainsi, pour $n = 2$, on obtient l'**équation des membranes vibrantes** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

où v désigne la vitesse de propagation de l'onde dans la membrane et $u(x, y, t)$ la cote du point de coordonnées (x, y) d'une membrane vibrante à l'instant t (cette cote étant mesurée par rapport à la position d'équilibre supposée de cote nulle).

■ Pour une **membrane rectangulaire** par exemple, dont la position d'équilibre s'identifie au rectangle $\mathbb{R} = [0, a] \times [0, b]$ du plan, le problème est d'étudier l'équation avec :

— les **conditions initiales** suivantes, réalisées pour tout nombre réel x :

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$$

qui signifient que la membrane a été lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position définie par la donnée de la fonction f, que l'on suppose de classe C^2 sur $\mathbb{R}$;

— les **conditions aux limites** suivantes, réalisées pour tout nombre réel positif t :

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant b).$$

qui signifient que la membrane est fixée aux bords du rectangle R.

Pour $t = 0$, on a donc :

$$f(x, 0) = f(x, b) = f(0, y) = f(a, y) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$$

■ L'**unicité des solutions** de ce problème se traite exactement comme au paragraphe 2.1.2.2. Supposons que l'on dispose de deux solutions u_1 et u_2 de l'équation (qui peut ici être homogène ou avec second membre, ce qui ne change rien à la démonstration), vérifiant les mêmes conditions initiales et les mêmes conditions aux limites.

Posons $u = u_1 - u_2$ et introduisons la fonction d'énergie suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2}\iint_R\left(\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t)\right)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Il est licite de dériver sous le signe intégral et, en omettant d'écrire (x, y, t) sous le signe intégral, il vient donc :

$$E'(t) = \iint_R\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Puisque $u = u_1 - u_2$ est aussi solution de l'équation des membranes vibrantes, on a :

$$E'(t) = \iint_R\left(\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_R\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Comme $u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0$, on a, par dérivation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(a, y, t) = 0,$$

et de même

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, b, t) = 0,$$

ce qui conduit aussitôt à :

$$E'(t) = \int_0^b\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^a\mathrm{d}y + \int_0^a\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right]_0^b\mathrm{d}x = 0.$$

Par conséquent, la fonction $t \to E(t)$ est constante et, en fait, nulle puisque $E(0) = 0$. Cela résulte de l'expression de $E(0)$ et du fait que u_1 et u_2 vérifiant les mêmes conditions initiales, on a :

— d'une part, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$;

— d'autre part, $u(x, y, 0) = 0$,

donc par dérivation :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, 0) = 0.$$

Puisque $E(t) = 0$, on a donc, pour $t \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant a\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant b$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = 0.$$

La fonction u est par conséquent constante sur

$$[0, a] \times [0, b] \times [0, +\infty],$$

et elle est nulle puisque $u(x, y, 0) = 0$. Ainsi, on a bien $u_1 = u_2$ et l'unicité annoncée.

■ De même, la **méthode de séparation des variables** permet d'obtenir la solution u du problème lorsque la fonction f est supposée suffisamment régulière. La résolution du problème de Sturm-Liouville conduit à nouveau aux fonctions trigonométriques, alors que, avec une membrane circulaire, elle conduirait aux fonctions de Bessel.

3. Une équation parabolique : l'équation de la chaleur

3.1 Équation de la chaleur en dimension 1

Il s'agit de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\gamma}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Les constantes c et γ désignent la capacité et la conductivité thermiques d'une barre et $u(x, t)$ indique la température au point d'abscisse x de la barre à l'instant t.

3.1.1 Cas d'une barre infinie

On suppose la barre infinie, et on assimile celle-ci à la droite réelle $\mathbb{R}$. On se propose d'étudier l'équation avec pour condition initiale, réalisée pour tout nombre réel x :

$$u(x, 0) = f(x).$$

Celle-ci indique la température des différents points de la barre à l'instant initial. On supposera cette fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et, pour simplifier les notations, on posera

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{c}.$$

Pour trouver la forme d'une solution, nous allons suivre ici une méthode différente et plus complexe que celle mise en œuvre dans le cas de l'équation hyperbolique correspondante (équation des cordes vibrantes (§ 2.1)), reposant sur la **transformation de Fourier**, à propos de laquelle nous faisons quelques brefs **rappels**.

- La transformée de Fourier Ff d'une fonction sommable f est définie par :

$$Ff(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\exp(-2i\pi xy)\mathrm{d}y.$$

- La transformée de Fourier conjuguée de la fonction Ff supposée sommable donne :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(y)\exp(2i\pi xy)\mathrm{d}y.$$

- Par un calcul très classique, on établit que la transformée de Fourier de la fonction $x \rightarrow \exp(-ax^2)$ est la fonction

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{-\pi^2 x^2}{a}\right) \qquad (a>0).$$

De plus, nous allons faire des **hypothèses** plus fortes en supposant, d'une part, f sommable sur $\mathbb{R}$, d'autre part, en cherchant des solutions u sommables sur $\mathbb{R}$ ainsi que leurs dérivées et telles que $\frac{\partial u}{\partial t}$ soit dominée sur $\mathbb{R}$ par une fonction sommable U indépendante de t.

En appliquant la transformation de Fourier à l'équation de la chaleur par rapport à la variable x, on obtient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\exp(-2i\pi xy)\mathrm{d}y = \omega^2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(y,t)\exp(-2i\pi xy)\mathrm{d}y.$$

La condition de domination $\left|\frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\exp(-2i\pi xy)\right| \leqslant U(y)$ par la fonction sommable U permet de justifier, au premier membre, la permuation des symboles d'intégration et de dérivation par rapport à la variable t, tandis que la sommabilité de u et de ses deux premières dérivées en x permet d'appliquer deux fois, au second membre, la formule $F(f')(x) = 2i\pi x Ff(x)$, permettant de simplifier la formule précédente qui devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(y,t)\exp(-2i\pi xy)\mathrm{d}y = -4\pi^2\omega^2 x^2\int_{-\infty}^{+\infty} u(y,t)\exp(-2i\pi xy)\mathrm{d}y.$$

Notant v la transformée de Fourier de u par rapport à sa première variable, on a donc :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + 4\pi^2\omega^2 x^2 v(x,t) = 0.$$

Cette équation différentielle se résout aisément et donne :

$$v(x,t) = Ff(x)\exp(-4\pi^2\omega^2 x^2 t)$$

puisque, pour $t = 0$, l'expression de droite $v(x, 0)$ n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction $x \rightarrow u(x,0) = f(x)$.

On note alors que :

— la fonction $x \rightarrow v(x,t)$ est sommable (pour $t > 0$) comme produit de la fonction bornée Ff (puisqu'une transformée de Fourier tend vers 0 en $\pm\infty$, donc est bornée) par la fonction sommable $x \rightarrow \exp(-4\pi^2\omega^2x^2t)$; par transformée de Fourier inverse (ou conjuguée), on a donc l'expression de $u(x, t)$ à partir de celle de $v(x, t)$ si $t > 0$;

— la fonction $x \rightarrow \exp(-4\pi^2\omega^2x^2t)$ est, d'après les rappels précédents, la transformée de Fourier de la fonction

$$x \rightarrow \frac{\exp(-x^2/4\omega^2 t)}{\sqrt{4\pi\omega^2 t}}.$$

Dans ces conditions, la transformée de Fourier (directe ou conjuguée) du produit est le produit de convolution des transformées de Fourier (directes ou conjuguées), d'où :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\omega\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\omega^2 t}\right)\mathrm{d}y.$$

On notera que l'application de la transformation de Fourier peut s'effectuer avec bien d'autres équations aux dérivées partielles, mais elle ne trouve son véritable champ d'application que dans le cadre des distributions.

La dernière formule ci-dessus définit en fait $u(x, t)$ pour tout couple (x, t) de nombres réels tels que $t > 0$ dès que f est supposée seulement continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit maintenant de savoir, **réciproquement**, si cette fonction u est de classe C^2 et si elle est solution de l'équation de la chaleur et si, enfin, $u(x, t)$ tend bien vers $f(x_0)$ lorsque (x, t) tend vers $(x_0, 0)$.

- Le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre montre que u est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et les dérivées de l'intégrale s'obtiennent par dérivation sous le signe intégral, ce qui permet de vérifier par un simple calcul que u est solution de l'équation de la chaleur.
- La fonction u vérifie la condition de Cauchy désirée, car $u(x, t)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque (x, t) tend vers $(x_0, 0)$.

En posant en effet $x - y = 2\omega z\sqrt{t}$, on a :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - 2\omega z\sqrt{t})\exp(-z^2)\mathrm{d}z.$$

Sous cette dernière forme, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre prouve immédiatement le résultat voulu.

Unicité des solutions

Si u_1 et u_2 sont deux solutions de notre problème, leur différence $u = u_1 - u_2$ est solution de l'équation de la chaleur avec $u(x, 0) = 0$.

Si u_1 et u_2 sont sommables sur $\mathbb{R}$ ainsi que leurs dérivées et telles que $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial t}$ soient dominées sur $\mathbb{R}$ par des fonctions sommables indépendantes de t, les calculs menés précédemment montrent que la transformée de Fourier de u est nulle, donc que u est nulle, ce qui établit – avec ces hypothèses supplémentaires – l'unicité de la solution du problème posé.

Dans le cas général, on ne peut a priori conclure à l'unicité des solutions. Ainsi, la fonction définie par :

$$u(x,t) = \frac{x}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\omega^2 t}\right)$$

pour $t > 0$ est bien solution de l'équation de la chaleur, et on peut vérifier que $u(x, t)$ se prolonge par continuité pour $t = 0$ par $u(x, 0) = 0$. Mais la fonction nulle est aussi solution de ce même problème de Cauchy, pour lequel il n'y a donc pas a priori unicité de la solution sans hypothèses supplémentaires (portant ici sur la croissance des solutions considérées).

3.1.2 Cas d'une barre finie

On suppose la barre finie de longueur L, et on assimile celle-ci au segment $[0, L]$. On se propose ici d'étudier l'équation avec :

— les **conditions aux limites** :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

pour tout nombre réel positif t, qui indiquent que les extrémités de la barre sont maintenues à la température 0 ;

— la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x)$$

pour $0 \leqslant x \leqslant L$, qui indique la température des différents points de la barre à l'instant initial ;

— avec aussi, bien sûr :

$$f(0) = f(L) = 0.$$

On supposera ici cette fonction f continue et de classe C^1 par morceaux sur $[0, L]$ et, pour simplifier les notations, on posera encore

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{c}.$$

3.1.2.1 Unicité d'une éventuelle solution

Deux méthodes peuvent ici être mises en œuvre, l'une analogue à celle développée dans l'étude des équations hyperboliques (§ 2.1.2.2), l'autre analogue à celle qui sera développée pour les équations elliptiques (§ 4).

On suppose donc que l'on a deux solutions u_1 et u_2 de l'équation (qui peut ici être homogène ou avec second membre, ce qui ne change rien à la démonstration), vérifiant la même condition initiale et les mêmes conditions aux limites.

On pose alors $u = u_1 - u_2$ et l'on a donc :

$$u(x, 0) = 0 \text{ et } u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

■ **Première méthode**

On introduit la fonction suivante, obtenue en multipliant l'équation de la chaleur par u et en l'intégrant par rapport à x sur $[0, L]$:

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\; u(x, t)\mathrm{d}x = \omega^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\; u(x, t)\mathrm{d}x.$$

Le premier membre apparaît comme une dérivée (on peut ici permuter les symboles de dérivation et d'intégration) et l'on peut intégrer par parties le second membre en tenant compte du fait que $u(0, t) = u(L, t) = 0$, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L u^2(x, t)\,\mathrm{d}x = -\,\omega^2 \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant 0.$$

Cela prouve que la fonction $t \rightarrow \int_0^L u^2(x, t)\mathrm{d}x$ est décroissante. Comme elle est nulle en 0 et visiblement à valeurs positives, elle est donc nulle, ce qui implique la nullité de u et l'égalité $u_1 = u_2$.

■ **Seconde méthode**

On va utiliser ici le **principe du maximum.**

Considérons un nombre réel strictement positif ε et la fonction :

$$u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x^2,$$

qui vérifie :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, t) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - 2\varepsilon\omega^2 = -2\varepsilon\omega^2.$$

Sur le compact $[0, L] \times [0, T]$ où $T > 0$, elle admet un maximum, atteint en un point (x_0, t_0) dont nous allons montrer qu'il est tel que :

$$x_0 = 0 \text{ ou } L \text{ avec } 0 \leqslant t_0 \leqslant T$$

ou tel que :

$$t_0 = 0 \text{ avec } 0 \leqslant x_0 \leqslant L.$$

Si tel n'est pas le cas, on a en effet :

$$0 < x_0 < L \text{ et } 0 < t_0 \leqslant T$$

et :

— la fonction $x \rightarrow u_\varepsilon(x, t_0)$ atteint son maximum en x_0 sur l'intervalle ouvert $]0, L[$ de sorte que l'on a les deux relations :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x_0, t_0) = 0\;;$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0$$

— la fonction $t \rightarrow u_\varepsilon(x_0, t)$ atteint son maximum en t_0 sur l'intervalle $]0, T[$ de sorte que, en considérant sa dérivée en t_0 comme sa dérivée à gauche, on a par définition :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, t_0) \geqslant 0.$$

On a alors, en combinant ces deux inégalités :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, t_0) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, t_0) = -2\varepsilon\omega^2 \geqslant 0.$$

Cette contradiction prouve le résultat annoncé, à savoir que u_ε atteint son maximum nécessairement sur l'un des trois bords inférieurs du rectangle $[0, L] \times [0, T]$. Comme on sait que $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x^2$ et que u est nulle sur les trois bords inférieurs de ce rectangle, ce maximum de u_ε est donc inférieur ou égal à εL^2.

Il en résulte que le maximum de u sur ce même rectangle, qui est inférieur ou égal à celui de u_ε est lui-même inférieur à εL^2. Comme ε est arbitraire, ce maximum de u est donc négatif et u est donc à valeurs négatives sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$.

Par le même raisonnement, quitte à remplacer u par $-u$, on voit que $-u$ est aussi à valeurs négatives, et donc u à valeurs positives, sur ce même rectangle.

En **conclusion**, pour tout $T \geqslant 0$, u est nulle sur $[0, L] \times [0, T]$, donc sur $[0, L] \times [0, +\infty]$ et l'on a bien l'égalité $u_1 = u_2$.

3.1.2.2 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables

L'idée de la méthode est la même que pour les équations hyperboliques (§ 2.1.2.3).

■ On commence par rechercher des solutions multiplicatives non nulles de la forme

$$(x, t) \rightarrow u(x)\; v(t)$$

vérifiant les conditions aux limites vues au début du paragraphe 3.1.2.

Ici, de telles solutions vérifient donc :

$$u(x)\, v'(t) = \omega^2\, u''(x)\, v(t).$$

Puisque l'on recherche des solutions non nulles, il existe a priori des nombres réels x_0 et t_0 pour lesquels :

$$u(x_0) \neq 0 \text{ et } v(t_0) \neq 0.$$

On en déduit, quitte à fixer $x = x_0$, puis $t = t_0$, l'existence de constantes λ et μ telles que l'on ait pour $t \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant L$:

$$u''(x) = \lambda u(x) \ ;$$

$$v'(t) = \mu v(t).$$

En reportant réciproquement dans l'équation, on voit que, en fait :

$$\mu = \omega^2 \lambda$$

et pour tenir compte des conditions aux limites, il faut enfin bien sûr que :

$$u(0) = u(L) = 0.$$

(On est encore amené à résoudre un problème, très simple, de Sturm-Liouville). Cette dernière condition ne peut être évidemment réalisée (ainsi qu'on l'a déjà détaillé dans le paragraphe 2.1.2.3) que si, et seulement si :

$$\lambda = \frac{-n^2\pi^2}{L^2}$$

où n désigne un nombre entier quelconque supérieur ou égal à 1, et l'on obtient alors les solutions suivantes :

$$u(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \ ;$$

$$v(t) = B_n \exp\left(\frac{-\omega^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}\right).$$

■ L'équation étant linéaire, les combinaisons linéaires des solutions précédentes sont encore solutions de l'équation. L'idée est à nouveau de ne pas se borner à des « combinaisons linéaires finies » pour obtenir une solution.

Posons donc, de façon purement formelle (on peut faire $A_n = 1$) :

$$u(x,t) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\omega^2 n^2\pi^2 t}{L^2}\right).$$

La condition de Cauchy portant sur $u(x, 0)$ sera formellement vérifiée en choisissant les coefficients B_n tels que :

$$f(x) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Un tel développment est celui d'une fonction impaire et $2L$-périodique sur $\mathbb{R}$, que l'on obtient en prolongeant la fonction f par imparité sur $[-L, L]$, puis par $2L$-périodicité. La fonction f ainsi prolongée est clairement continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On en déduit qu'elle est développable en série de Fourier et que sa série de Fourier converge normalement vers f.

Si l'on pose donc :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\omega^2 n^2\pi^2 t}{L^2}\right),$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\frac{n\pi y}{L}\,dy,$$

on voit que la série définissant u est normalement convergente sur $[0, L] \times [0, +\infty[$, donc continue, et l'on vérifie aisément, à l'aide des théorèmes sur les séries de fonctions, qu'une telle fonction est de classe C^2 sur $[0, L] \times [0, +\infty[$, les dérivations s'effectuant terme à terme, ce qui permet de vérifier que la fonction obtenue, qui vérifie les conditions initiale et aux limites, est solution de l'équation de la chaleur.

On notera que la convergence normale de la série, figurant ci-dessus sous le signe intégral, autorise la permutation des symboles de sommation et d'intégration, de sorte qu'en utilisant les formules de trigonométrie usuelle, on obtient (la fonction f étant toujours supposée prolongée sur $\mathbb{R}$ par imparité et $2L$-périodicité) les égalités suivantes :

$$u(x,t) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(y)\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{n\pi(x-y)}{L}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\omega^2 t}{L^2}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(y)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\frac{\mathrm{i}n\pi(x-y)}{L}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\omega^2 t}{L^2}\right)dy.$$

(Pour $n = 0$, l'intégrale de la fonction impaire f sur $[-L, L]$ est nulle.

Cela s'écrit également avec la formule sommatoire de Poisson (cf. encadré) :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\omega\sqrt{\pi t}}\int_{-L}^{+L} f(y)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-y-2nL)^2}{4\omega^2 t}\right)dy.$$

Ici encore, la convergence normale de la série figurant sous le signe intégral justifie la permutation des symboles d'intégration et de sommation.

En effectuant alors, dans chaque intégrale, le changement de variables

$$z = y - 2nL$$

puis en prenant en compte la $2L$-périodicité de f (dont on rappelle qu'elle a été convenablement prolongée sur $\mathbb{R}$ auparavant), on obtient enfin la formule suivante :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\omega\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4\omega^2 t}\right)dz.$$

On remarquera qu'elle est très exactement l'analogue de celle obtenue dans le cas d'une barre infinie (§ 3.1.1).

1. La formule sommatoire de Poisson que l'on vient d'utiliser s'obtient facilement par développement en série de Fourier de la fonction indéfiniment dérivable et $2L$-périodique définie avec $a > 0$ par :

$$\phi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-a(u-2nL)^2).$$

Le calcul de son coefficient de Fourier c_k donne en effet :

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k\pi u}{L}\right)\phi(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-a(u-2nL)^2)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k\pi u}{L}\right)du.$$

Par convergence uniforme, il est possible de permuter les symboles d'intégration et de sommation, ce qui donne alors :

$$c_k = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-L}^{+L}\exp(-a(u-2nL)^2)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k\pi u}{L}\right)du.$$

En effectuant le changement de variable $v = u - 2nL$, on obtient (en tenant compte de la périodicité de l'exponentielle complexe) :

$$c_k = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-(2n+1)L}^{+(2n+1)L}\exp(-av^2)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k\pi v}{L}\right)dv$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-av^2)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k\pi v}{L}\right)dv.$$

Quitte à intégrer la forme différentielle (clairement exacte) $\exp(-az^2)dz$ sur le bord du rectangle dont les quatre sommets sont $(-A, 0)$, $(A, 0)$, $(A, ik\pi/2aL)$ et $(-A, ik\pi/2aL)$, puis à faire tendre A vers $+\infty$ (les deux intégrales sur les bords verticaux du rectangle ont alors pour limite 0), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a\left(v+\frac{ik\pi}{2aL}\right)^2\right)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-av^2)dv = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Il en résulte que la valeur du coefficient de Fourier c_k est égale à :

$$c_k = \frac{1}{2L}\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{4aL^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-a\left(v+\frac{ik\pi}{2aL}\right)^2\right)dv$$
$$= \frac{1}{2L}\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{4aL^2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Puisque la fonction ϕ est développable en série de Fourier d'après le théorème de Dirichlet, on obtient la version suivante de la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-a(u-2nL)^2) = \sqrt{\frac{\pi}{4aL^2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{4aL^2}\right)\cdot\exp\left(\frac{ik\pi u}{L}\right)$$

et la forme utilisée dans le calcul mené plus haut en résulte en faisant $u = x - y$ et $a = 1/4\omega^2 t$.

2. Contrairement à la situation qui prévalait avec l'équation des ondes (de type hyperbolique), on notera qu'avec l'équation de la chaleur (de type parabolique), il est hors de question de vouloir « remonter le temps » en attribuant à t des valeurs négatives, car les résultats obtenus perdent alors tout sens.

3. La solution u ainsi obtenue dépend continûment de la donnée initiale f. En effet, on remarque facilement que l'on a :

$$\|u\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty .$$

Comme on l'a déjà indiqué dans le cadre de l'équation des cordes vibrantes, supposons que la donnée initiale f ne soit connue que par une approximation $\underline{f}$. Notons alors u et $\underline{u}$ les solutions associées à ces données initiales exactes et approchées f et $\underline{f}$ et

$$\Delta u = u - \underline{u} \text{ et } \Delta f = f - \underline{f}$$

les erreurs. On a par différence :

$$\Delta u\,(x,t) = \frac{1}{2\omega\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta f(z)\exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4\omega^2 t}\right)dz.$$

Et donc de même

$$\|\Delta u\|_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant L}|u(x)-\underline{u}(x)| \leqslant \|\Delta f\|_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant L}|f(x)-\underline{f}(x)|.$$

3.2 Généralisation : équation de la chaleur en dimension *n*

Il s'agit de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\gamma}{c}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right).$$

Ainsi, pour une **plaque rectangulaire** que l'on identifie au rectangle $R = [0, a]\times[0, b]$, le problème est par exemple d'étudier l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\gamma}{c}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

où $u(x, y, t)$ désigne la température au point des coordonnées (x, y) de la plaque à l'instant t avec :

— les **conditions aux limites** suivantes, réalisées pour tout nombre réel positif t :

$$u(x,0,t) = u(x,b,t) = u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \qquad (0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$$

qui signifient que les bords de la plaque sont maintenues à la température 0.

— la **condition initiale** suivante, réalisée pour tout couple (x, y) de nombres réels tels que $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$:

$$u(x,y,0) = f(x,y)$$

qui indique la température des différents points de la plaque à l'instant initial ;

— avec aussi, bien sûr :

$$f(x,0) = f(x,b) = f(0,y) = f(a,y) = 0.$$

On supposera ici cette fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour simplifier les notations, on posera encore $\omega^2 = \frac{\gamma}{c}$.

L'unicité des solutions de ce problème se traite exactement comme au paragraphe 3.1.2.1. Supposons que l'on dispose de deux solutions u_1 et u_2 de l'équation (qui peut ici être homogène ou avec second membre, ce qui ne change rien à la démonstration), vérifiant la même condition initiale et les mêmes conditions aux limites.

On pose $u = u_1 - u_2$ et l'on a donc :

$$u(x,0,t) = u(x,b,t) = u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0$$

et

$$u(x,y,0) = 0 \qquad (0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b).$$

On peut alors utiliser l'une des deux méthodes déjà indiquées.

a) On considère la fonction définie pour $t \geqslant 0$ par :

$$\iint_R \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t)\,u(x,y,t)\,dxdy$$
$$= \omega^2\iint_R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t)\right)u(x,y,t)\,dxdy.$$

Le premier membre apparaît comme une dérivée (on peut permuter les symboles de dérivation et d'intégration) et l'on peut intégrer par parties le second membre en tenant compte du fait que u s'annule sur le bord du rectangle ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\iint_R u^2(x,y,t)\,dxdy$$
$$= -\omega^2\iint_R\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\right)^2\right)dxdy \leqslant 0.$$

Cela prouve que la fonction $t \rightarrow \iint_R u^2(x,y,t)\,dxdy$ est décroissante. Comme elle est nulle en 0 et à valeurs positives, elle est donc nulle, ce qui implique la nullité de u et l'égalité $u_1 = u_2$.

b) On utilise le principe du maximum en considérant un nombre réel strictement positif ε et la fonction

$$u_\varepsilon(x, y, t) = u(x, y, t) + \varepsilon(x^2 + y^2)$$

qui vérifie :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, y, t) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x, y, t) - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) = -4\varepsilon\omega^2 .$$

Sur le compact $[0, a] \times [0, b] \times [0, T]$ où $T > 0$, elle admet un maximum, atteint en un point (x_0, y_0, t_0). On se propose d'établir qu'il est tel que :

$$x_0 = 0 \text{ ou } a \text{ ou } y_0 = 0 \text{ ou } b \text{ avec } 0 \leqslant t_0 \leqslant T$$

ou tel que :

$$t_0 = 0 \text{ avec } 0 \leqslant x_0 \leqslant a \text{ et } 0 \leqslant y_0 \leqslant b .$$

Sinon, on a en effet $0 < x_0 < a$ et $0 < y_0 < b$ et $0 < t_0 \leqslant T$ et :

— la fonction $x \to u_\varepsilon(x, y_0, t_0)$ atteint son maximum en x_0 sur l'intervalle ouvert $]0, a[$, la fonction $y \to u_\varepsilon(x_0, y, t_0)$ atteint son maximum en y_0 sur l'intervalle ouvert $]0, b[$, de sorte que l'on a les relations :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x_0, y_0, t_0) = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0, t_0) \leqslant 0 ;$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x_0, y_0, t_0) = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x_0, y_0, t_0) \leqslant 0 ;$$

— la fonction $t \to u_\varepsilon(x_0, y_0, t)$ atteint son maximum en t_0 sur l'intervalle $]0, T[$ de sorte que, en considérant sa dérivée en t_0 comme sa dérivée à gauche, on a par définition :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, y_0, t_0) \geqslant 0 .$$

On obtient alors en combinant ces deux inégalités :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, y_0, t_0) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0, t_0) - \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x_0, y_0, t_0) = -4\varepsilon\omega^2 \geqslant 0 .$$

Cette contradiction prouve le résultat annoncé, à savoir que u_ε atteint son maximum sur l'un des cinq côtés inférieurs du parallélépipède $[0, a] \times [0, b] \times [0, T]$. Comme on sait que :

$$u_\varepsilon(x, y, t) = u(x, y, t) + \varepsilon(x^2 + y^2)$$

et que u est nulle sur les cinq côtés inférieurs de ce parallélépipède, ce maximum de u_ε est inférieur ou égal à $\varepsilon(a^2 + b^2)$.

Il en résulte que le maximum de u sur ce même parallélépipède, qui est inférieur ou égal à celui de u_ε est lui-même inférieur à $\varepsilon(a^2 + b^2)$. Comme ε est arbitraire, ce maximum de u est donc négatif et u est donc à valeurs négatives sur $[0, a] \times [0, b] \times [0, T]$.

Par le même raisonnement, quitte à remplacer u par $-u$, on voit que $-u$ est aussi à valeurs négatives, et donc u à valeurs positives, sur ce même parallélépipède.

En **conclusion**, pour tout $T \geqslant 0$, u est nulle sur le parallélépipède $[0, a] \times [0, b] \times [0, T]$ donc sur $[0, a] \times [0, b] \times [0, +\infty]$ et l'on a bien l'égalité $u_1 = u_2$.

■ De même, la **méthode de séparation des variables** permet d'obtenir la solution u du problème lorsque la fonction f est supposée suffisamment régulière. La résolution du problème de Sturm-Liouville conduit à nouveau aux fonctions trigonométriques, alors qu'avec une plaque circulaire, elle conduirait aux fonctions de Bessel.

4. Une équation elliptique : l'équation de Laplace

4.1 Présentation

Reprenons l'équation de diffusion de la chaleur dans une plaque, que l'on a étudiée paragraphe 3.2. Si l'on parvient à un état d'équilibre, on voit que la température asymptotique d'équilibre $u(x, y)$ au point de coordonnées (x, y) de la plaque vérifie l'équation elliptique suivante, dite **équation de Laplace** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ou

$$\Delta u = 0.$$

Comme on le voit sur cet exemple, cette équation elliptique est indépendante du temps et décrit un phénomène stationnaire.

■ De façon générale, en dimension n, l'équation de Laplace s'écrit :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 .$$

Dans un premier temps (§ 4.2), on étudiera simplement cette équation dans un ouvert U (tout en se limitant, pour les démonstrations, au cas $n = 2$ du plan). Ses solutions sont, par définition, les fonctions harmoniques dans l'ouvert U et elles jouissent de nombreuses propriétés particulièrement intéressantes.

Dans un second temps (§ 4.3) et (§ 4.4), on étudiera l'équation de Laplace en ajoutant des conditions aux limites à la frontière de l'ouvert U (problèmes de Dirichlet ou de Neumann).

■ **Exemples de fonctions harmoniques**

Cherchons les fonctions u harmoniques dans $\mathbb{R}^n$ sauf à l'origine et ne dépendant que de la distance r à l'origine. Celles-ci vérifient

$$\Delta\left(u\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right)\right) = 0 ,$$

soit :

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) = 0 .$$

Pour $n = 2$, on obtient :

$$u(r) = \ln r ;$$

et pour $n \geqslant 3$:

$$u(r) = -\frac{1}{(n-2)r^{n-2}} .$$

4.2 L'équation de Laplace et les fonctions harmoniques dans un ouvert U

Les solutions de l'équation de Laplace dans U, c'est-à-dire les fonctions harmoniques dans U, satisfont plusieurs propriétés remarquables, parmi lesquelles les suivantes.

Proposition 3.

On désigne par U un ouvert borné.

a) *Une fonction u est supposée harmonique dans U et se prolongeant par continuité sur l'adhérence $\overline{U}$ de U, c'est-à-dire sur U et sa frontière, vérifie le principe du maximum : autrement dit, la fonction u atteint son maximum et son minimum sur la frontière de U.*

b) *Deux fonctions harmoniques (ou plus généralement vérifiant le principe du maximum) dans U et se prolongeant par continuité sur l'adhérence $\overline{U}$ de U sont égales dans U si, et seulement si, elles sont égales sur la frontière de U.*

Démonstration. ◊

Le principe du maximum s'établit comme on l'a fait paragraphe 3.1.2.1. On considère un nombre réel strictement positif ε et la fonction :

$$u_\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2).$$

Puisque u est harmonique, on a :

$$\Delta u_\varepsilon = 4\varepsilon.$$

a) Sur le compact $\overline{U}$ constitué de U et de sa frontière, la fonction continue u_ε admet un maximum, atteint en un point $M_0(x_0, y_0)$ qui appartient nécessairement à la frontière de U. Sinon, (x_0, y_0) appartient à l'ouvert U et :

— la fonction $x \to u_\varepsilon(x, y_0)$ atteint son maximum en x_0 sur un intervalle ouvert centré en x_0 ;

— la fonction $y \to u_\varepsilon(x_0, y)$ atteint son maximum en x_0 sur un intervalle ouvert centré en y_0, de sorte que l'on a les relations :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leqslant 0 ;$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leqslant 0.$$

On en déduit que $\Delta u_\varepsilon = 4\varepsilon \leqslant 0$, ce qui est contradictoire et prouve donc que la fonction u_ε atteint son maximum en un point $M_0(x_0, y_0)$ qui appartient comme annoncé à la frontière de U. On a donc pour tout point M appartenant à $\overline{U}$:

$$u(M) \leqslant u_\varepsilon(M) \leqslant u_\varepsilon(M_0) = u(M_0) + \varepsilon(x_0^2 + y_0^2) \leqslant u(M_0) + \varepsilon D^2$$

où D^2 est la borne supérieure de l'ensemble des carrés des distances $x^2 + y^2$ de l'origine O aux points de l'ouvert borné U.

En faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$u(M) \leqslant u(M_0),$$

ce qui établit que u atteint son maximum sur la frontière de U (on procède de même pour le minimum).

b) Passons au second point. Soient u_1 et u_2 deux fonctions harmoniques (ou vérifiant le principe du maximum) sur U qui se prolongent par continuité sur $\overline{U}$. L'égalité de ces deux fonctions sur la frontière de U implique que la différence $u = u_1 - u_2$ est harmonique dans U et nulle sur la frontière de U : comme u atteint son maximum et son minimum sur la frontière de U (principe du maximum) on en déduit que u est nulle sur U, et donc que $u_1 = u_2$.

La réciproque est évidente. ◊

Avant d'établir d'autres résultats, on démontre maintenant deux formules de Green.

Formules de Green :

$$\iint_D \overrightarrow{\nabla u} \cdot \overrightarrow{\nabla v}\, dxdy + \iint_D u\, \Delta v\, dxdy = \oint_{\partial D+} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\, ds .$$

$$\iint_D u\, \Delta v\, dxdy - \iint_D v\, \Delta u\, dxdy = \oint_{\partial D+} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) ds.$$

Dans ces formules, on désigne :

— par D un compact connexe du plan dont le bord est supposé « suffisamment régulier » ;

— par $\partial D+$ et le bord orienté de D ;

— par $\vec{n}$ la normale unitaire à $\partial D+$ orientée vers l'extérieur de D ;

— par u et v deux fonctions de classe C^2 sur l'intérieur de D et se prolongeant par continuité sur D.

Démonstration. ◊

Ces deux formules résultent directement de la formule de Green-Riemann que, selon l'habitude, on écrit sous la forme :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D+} P dx + Q dy.$$

La première formule s'obtient en posant ci-dessus :

$$P = -u \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial x}$$

puis, en permutant les rôles de u et v et en soustrayant les deux égalités obtenues, on a la seconde formule. ◊

> En prenant, dans la première formule de Green, $u = 1$ et v harmonique, on obtient :
>
> $$\oint_{\partial D+} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = \oint_{\partial D+} \overrightarrow{\nabla v} \cdot \vec{n}\, ds = 0.$$
>
> Cette égalité signifie que le flux du gradient d'une fonction harmonique au travers d'un contour (ou d'une surface) fermé est nul.

Proposition 4.

Une fonction harmonique u dans un ouvert U vérifie le principe de la moyenne. Autrement dit, pour tout point $M_0(x_0, y_0)$ de U et pour tout nombre $r > 0$ tel que la boule fermée de centre M_0 et de rayon r soit incluse dans l'ouvert U, le nombre $u(x_0, y_0)$ est la moyenne des valeurs prises par u sur la sphère (et aussi sur la boule) de centre M_0 et de rayon r, ce qui, en dimension 2, s'écrit :

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) r d\theta$$
$$= \frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(M_0, r)} u(x, y)\, dxdy.$$

Réciproquement, on peut établir que toute fonction continue dans U qui vérifie le principe de la moyenne est harmonique dans U.

Démonstration. ◊

Dans la seconde formule de Green, convenons de choisir :

— pour compact D, la couronne $\left\{\frac{M}{\varepsilon} \leqslant M_0M \leqslant r\right\}$ avec $0 < \varepsilon < r$,

dont le bord est composé, d'une part du cercle $C(M_0, r)$ parcourue

dans le sens direct, et, d'autre part, du cercle $C(M_0, \varepsilon)$ parcourue dans le sens indirect ;

— pour u, la fonction harmonique de l'énoncé ;

— pour v, la fonction (dont on sait qu'elle est harmonique dans D) définie par

$$v(x, y) = \ln r \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La seconde formule de Green donne dans ce contexte :

$$\oint_{\partial D+} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) ds = \oint_{C(M_0, r)+} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) ds$$

$$- \oint_{C(M_0, \varepsilon)+} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) ds = 0.$$

La dérivée de v suivant la normale extérieure à la couronne D en un point (x, y) du cercle de centre M_0 et de rayon r (resp. ε) est :

$$\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \ (\text{resp. } 1/\varepsilon),$$

ce qui conduit à l'égalité suivante :

$$\frac{1}{r} \oint_{C(M_0, r)+} u ds - \ln r \oint_{C(M_0, r)+} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \oint_{C(M_0, \varepsilon)+} u ds + \ln \varepsilon \oint_{C(M_0, \varepsilon)+} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0.$$

Comme le flux du gradient d'une fonction harmonique au travers d'un contour fermé est nul (cf. encadré précédent), le premier et le troisième des termes figurant dans cette dernière formule sont nuls et l'on a enfin :

$$\frac{1}{r} \oint_{C(M_0, r)+} u ds - \frac{1}{\varepsilon} \oint_{C(M_0, \varepsilon)+} u ds = 0.$$

En paramétrant les deux cercles de rayons ε et r par l'angle polaire θ, il vient :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + r\cos\theta, \ y_0 + r\sin\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + \varepsilon\cos\theta, \ y_0 + \varepsilon\sin\theta) d\theta.$$

Faisant tendre ε vers 0 et tenant compte de la continuité de u en M_0, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre donne enfin :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + r\cos\theta, \ y_0 + r\sin\theta) d\theta = 2\pi \ u(x_0, y_0).$$

Pour obtenir la seconde égalité, il suffit de changer r en ρ dans l'égalité ci-dessus, de multiplier celle-ci par ρ et d'intégrer de 0 à r, ce qui donne :

$$\int_0^r \int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + \rho\cos\theta, \ y_0 + \rho\sin\theta) \rho d\theta \, d\rho = 2\pi \int_0^r \rho u(x_0, y_0) d\rho.$$

Passant de coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes, on a bien :

$$\iint_{B(M_0, r)} u(x, y) dx dy = \pi r^2 u(x_0, y_0). \qquad \Diamond$$

1. Le **principe de la moyenne** apparaît physiquement très naturel si l'on se souvient que l'équation de Laplace représente des phénomènes stationnaires.

2. Le principe de la moyenne implique le **principe du maximum.**

Supposons en effet que la fonction u, harmonique dans un ouvert connexe borné U et se prolongeant par continuité sur $\bar{U}$, atteigne son maximum μ dans U.

Si M_0 est un point appartenant à U où u atteint son maximum, on a :

$$u(M) \leqslant u(M_0)$$

sur un voisinage de ce point M_0. Choisissant un nombre réel strictement positif r assez petit, on a alors :

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(M_0, r)} u(x, y) dx dy \leqslant u(x_0, y_0).$$

Mais cette inégalité est en fait une égalité d'après le principe de la moyenne, et cela implique que, dans cette boule de centre M_0 et de rayon r, on a :

$$u(M) = u(M_0).$$

Ainsi, l'ensemble des points M appartenant à U tels que $u(M) = \mu$ est à la fois ouvert (d'après ce qui précède) et fermé (d'après la continuité de u).

Puisque U est connexe, l'ensemble de ces points M tels que $u(M) = \mu$ et égal à U et en fait à $\bar{U}$ par continuité de u. Ainsi, dans ce cas, u est constante. Il en résulte que si u n'est pas constante, elle atteint bien son maximum (et son minimum) sur la frontière de U.

3. Les fonctions harmoniques dans U possèdent d'**autres propriétés.** En particulier, toute fonction harmonique dans U est nécessairement indéfiniment dérivable (et ses dérivées sont bien sûr harmoniques) et analytique dans U.

4.3 L'équation de Laplace et le problème de Dirichlet dans un cercle

On se propose de résoudre le problème suivant : trouver les fonctions harmoniques U (c'est-à-dire solutions de l'équation de Laplace) dans le disque de centre O de rayon R qui se prolongent par continuité sur la circonférence de centre O et de rayon R et vérifient :

$$U(R\cos\theta, R\sin\theta) = f(\theta)$$

où f est une fonction continue 2π-périodique.

Autrement dit, on cherche les fonctions harmoniques U prenant des valeurs données sur la circonférence de centre O et de rayon R.

4.3.1 Unicité d'une éventuelle solution par le principe du maximum

Supposons que l'on dispose de deux solutions U_1 et U_2 de ce problème de Dirichlet. Celles-ci sont harmoniques dans le disque de centre O et de rayon R, se prolongent par continuité à la circonférence de centre O et de rayon R où elles sont égales.

D'après la proposition **3**, elles sont égales.

4.3.2 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables

Puisque l'on travaille sur un cercle, nous allons utiliser des coordonnées polaires de centre O. Au lieu de chercher directement une fonction harmonique $(x, y) \to U(x, y)$ solution du problème, nous allons poser

$$U(x, y) = U(r\cos\theta, r\sin\theta) = u(r, \theta)$$

et déterminer d'abord u.

Vu l'expression du laplacien en coordonnées polaires, on sait que U vérifie $\Delta U = 0$ si, et seulement si, u vérifie la relation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 .$$

De plus, cette fonction u devra vérifier la condition au bord $u(R, \theta) = f(\theta)$.

On commence, comme d'habitude, par chercher les solutions sous forme multiplicative

$$(r, \theta) \to u(r)v(\theta),$$

ce qui conduit à résoudre deux équations de la forme :

$$r^2 u''(r) + ru'(r) + \lambda u(r) = 0 ;$$

$$v''(\theta) - \lambda v(\theta) = 0$$

où λ désigne un nombre réel.

Pour tenir compte du fait que la fonction obtenue doit être de classe C^2 sur le disque de centre O et de rayon R, il faut bien sûr que :

$$v(0) = v(2\pi),$$
$$v'(0) = v'(2\pi),$$
$$v''(0) = v''(2\pi)$$

(ce qui conduit encore à un problème de Sturm-Liouville). Ces dernières conditions ne peuvent être réalisées que si, et seulement si, λ est de la forme $-n^2$ où n désigne un nombre entier naturel non nul.

L'équation en u est une équation d'Euler, dont on cherche des solutions dépendantes sur $]0, +\infty[$ sous la forme $r \to r^a$, de sorte que les solutions obtenues pour les deux équations précédentes sont, avec $r > 0$:

$$v(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) ;$$

$$u(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}.$$

Pour que u se prolonge par continuité sur $[0, R]$, il faut de plus que $D_n = 0$.

L'équation étant linéaire, on cherche donc, de façon formelle, des solutions de la forme suivante :

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

Pour que la condition au bord du cercle soit vérifiée, il faut enfin que, pour $r = R$:

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

On choisira donc pour nombres A_n et B_n les coefficients de Fourier de f et l'on est finalement conduit à envisager pour solution de notre problème la fonction :

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \cos n\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt \sin(n\theta)\right).$$

Cette expression peut également s'écrire :

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta - t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos nt\right)dt .$$

En effet, la fonction f étant continue et 2π-périodique est bornée, et il est clair que, pour $0 \leqslant r < R$, la série figurant ci-dessus sous le signe intégral est uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$, ce qui justifie la permutation des symboles de sommation et d'intégration. La seconde expression obtenue résulte alors de la première à l'aide du changement de variable $t' = \theta - t$.

On s'intéresse maintenant à la fonction P suivante, définie pour tout couple (x, t) de nombres réels tels que $-1 < x < 1$ et appelée **noyau de Poisson** du problème de Dirichlet relatif au cercle :

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos nt .$$

On remarque d'abord que cette fonction est paire en la variable t et que son intégrale sur $[0, 2\pi]$ est égale à 1 (on peut en effet intégrer terme à terme en t par convergence uniforme de la série). De plus, on a l'expression plus simple :

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos nt = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{+\infty}(xe^{it})^n$$
$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\,\frac{xe^{it}}{1 - xe^{it}} = \frac{1 - x^2}{2\pi(x^2 - 2x\cos t + 1)}$$

Finalement, on dispose des deux formes suivantes pour $u(r, \theta)$:

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta - t)\, P\left(\frac{r}{R}, t\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} f(\theta - t)\,\frac{R^2 - r^2}{2\pi(r^2 - 2rR\cos t + R^2)}\,dt .$$

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} f(t)\, P\left(\frac{r}{R}, \theta - t\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{R^2 - r^2}{2\pi(r^2 - 2rR\cos(\theta - t) + R^2)}\,dt .$$

Revenant en coordonnées cartésiennes, cette formule s'écrit aussi :

$$U(x, y) = \int_0^{2\pi} f(t) \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi(x^2 + y^2 - 2R\,(x \cos t + y \sin t) + R^2)} \mathrm{d}t .$$

Il reste maintenant à voir si cette fonction est bien solution du problème de Dirichlet que l'on s'était donné au départ.

● Cette fonction est continue, de classe C^2 et peut se dériver sous le signe intégral pour :

$$0 \leqslant r = \sqrt{x^2 + y^2} < R$$

d'après les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe intégral. En effectuant le calcul, on vérifie, de plus, facilement que :

$$\Delta U(x, y) = \int_0^{2\pi} f(t)\, \Delta\left(\frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi(x^2 + y^2 - 2R\,(x \cos t + y \sin t) + R^2)}\right) \mathrm{d}t = 0$$

● Cette fonction se prolonge par continuité sur la circonférence de centre O et de rayon R, et $u\,(r, \theta)$ tend bien vers $f(\theta_0)$ lorsque (r, θ) tend vers (R, θ_0). En effet, puisque l'intégrale du noyau de Poisson vaut 1, on a :

$$u(r, \theta) - f(\theta_0) = \int_0^{2\pi} (f(\theta - t) - f(\theta_0)) \frac{R^2 - r^2}{2\pi(r^2 - 2rR \cos t + R^2)} \mathrm{d}t .$$

La fonction f étant continue et 2π-périodique est évidemment bornée sur $\mathbb{R}$ (par un nombre M) et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe donc un nombre $\alpha > 0$ tel que :

$$(|x - y| \leqslant 2\alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon) .$$

Supposons donc $|\theta - \theta_0| \leqslant \alpha$ et $R \sin\alpha \leqslant r < R$ et montrons que $u\,(r, \theta) - f(\theta)$ est alors inférieur en valeur absolue à 3ε.

A cet effet, on découpe l'intervalle d'intégration $[0, 2\pi]$ en trois intervalles, allant de 0 à α, de α à $2\pi - \alpha$ et de $2\pi - \alpha$ à 2π. On a clairement :

$$|f(\theta - t) - f(\theta_0)| \leqslant \varepsilon$$

sur le premier et le dernier de ces trois intervalles et, le noyau de Poisson étant positif et d'intégrale égale à 1 sur $[0, 2\pi]$, on peut donc majorer par ε les intégrales sur ces premier et dernier intervalles, de sorte que l'on a :

$$|u\,(r, \theta) - f(\theta_0)|$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \int_\alpha^{2\pi - \alpha} |f(\theta - t) - f(\theta_0)| \frac{R^2 - r^2}{2\pi(r^2 - 2rR \cos t + R^2)} \mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \frac{2M\,(R^2 - r^2)}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi - \alpha} \frac{\mathrm{d}t}{(r - R\cos t)^2 + R^2 \sin^2 t}$$

Maintenant, il est clair que le dénominateur dans cette dernière intégrale est supérieur ou égal à $R^2 \sin^2\alpha$ (c'est évident pour $\alpha \leqslant t \leqslant \pi/2$ et $3\pi/2 \leqslant t \leqslant 2\pi - \alpha$ en minorant par 0 le premier terme situé au dénominateur ; c'est également vrai pour $\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$ car $r - R\cos t \geqslant r \geqslant R\sin\alpha$. Finalement, on voit que, quitte à choisir r encore plus proche de R, on a bien le résultat voulu, c'est-à-dire :

$$|u(r, \theta) - f(\theta_0)| \leqslant 2\varepsilon + \frac{2M\,(R^2 - r^2)}{R^2 \sin^2\alpha} \leqslant 3\varepsilon .$$

Le problème de Dirichlet est ainsi résolu sur le cercle.

On laisse enfin au lecteur le soin de vérifier qu'ici encore la solution u obtenue pour le problème de Dirichlet sur le cercle dépend continûment de la donnée initiale f et de tirer les conséquences de ce résultat.

Principe de la moyenne et harmonicité sur un ouvert.

On est maintenant en mesure de prouver (en restant dans le cas de deux variables, mais la démonstration se généralise sans grande modification au cas général) que toute fonction u continue sur un ouvert U et y vérifiant le principe de la moyenne est harmonique (réciproque de la proposition **4**).

Considérons un point M_0 appartenant à U. Comme U est ouvert, il existe un nombre réel $R > 0$ tel que la boule fermée de centre M_0 et de rayon R est incluse dans U. Introduisons alors, sur cette boule fermée, la fonction v définie par :

$$v(x, y) =$$

$$\int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos t\,,\, y_0 + R\sin t) \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi(x^2 + y^2 - 2R(x\cos t + y\sin t) + R^2)} \mathrm{d}t$$

(On a repris la formule précédente en changeant $f(t)$ en $u\,(x_0 + R\cos t,\, y_0 + R\sin t)$).

D'après ce qui précède, cette fonction v est continue sur la boule fermée de centre M_0 et de rayon R ; elle coïncide avec u sur la circonférence de centre M_0 et de rayon R et elle est harmonique dans le disque de centre M_0 et de rayon R, donc elle y vérifie le principe de la moyenne d'après la proposition **4**.

Les fonctions u et v sont donc égales sur la circonférence de centre M_0 et de rayon R et vérifient le principe de la moyenne dans le disque de centre M_0 et de rayon R, donc le principe du maximum (cf. encadré du paragraphe 4.2). Il résulte alors de la proposition **3** que $u = v$ sur la boule fermée de centre M_0 et de rayon R et u, comme v, est donc harmonique dans le disque de centre M_0 et de rayon R, et par conséquent dans U puisque M_0 est un point quelconque de U.

4.4 L'équation de Laplace et le problème de Neumann dans un cercle

4.4.1 Généralités

On se propose de résoudre le problème suivant : trouver les fonctions harmoniques U (c'est-à-dire solutions de l'équation de Laplace) dans le disque de centre O de rayon R qui se prolongent par continuité sur la circonférence de centre O et de rayon R et y admettent en tout point M $(R\cos\theta, R\sin\theta)$ un vecteur dérivé suivant le vecteur unitaire normal $\vec{n}\,(\cos\theta\,, \sin\theta)$ vérifiant la condition dite de Neumann :

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}(R\cos\theta\,, R\sin\theta) = f(\theta)$$

où f est une fonction continue 2π-périodique.

Autrement dit, on cherche les fonctions harmoniques U dont la dérivée normale suivant la circonférence de centre O et de rayon R est donnée.

Remarque préliminaire. Rappelons que le flux du gradient d'une fonction harmonique au travers d'un contour (ou d'une surface) fermé est nul. En effet, la première formule de Green (§ 4.2) s'écrit :

$$\iint_D \overrightarrow{\nabla u} \cdot \overrightarrow{\nabla v} \, dxdy + \iint_D u \, \Delta v \, dxdy = \oint_{\partial D+} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds .$$

Appliquée avec $u = 1$ et $v = U$, où U désigne une solution du problème de Neumann envisagé ci-dessus, on en déduit que la fonction f vérifie nécessairement la condition :

$$\oint_{C(0,R)} \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \vec{n}}(R\cos\theta, R\sin\theta) R \, d\theta = R \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0.$$

On verra que cette condition nécessaire d'existence des solutions est, en fait, suffisante.

4.4.2 Unicité à une constante additive près d'une éventuelle solution

Supposons que l'on dispose de deux solutions U_1 et U_2 de ce problème de Neumann. Celles-ci sont harmoniques dans le disque de centre O et de rayon R, se prolongent par continuité à la circonférence de centre O de rayon R où elles vérifient pour tout θ :

$$\frac{\partial U_1}{\partial \vec{n}} (R\cos\theta, R\sin\theta) = \frac{\partial U_2}{\partial \vec{n}} (R\cos\theta, R\sin\theta).$$

D'après la formule de Green que l'on vient de rappeler, appliquée avec $u = v = U_1 - U_2$, on a :

$$\iint_{B(0,R)} \vec{\nabla}^2 (U_1 - U_2)(x, y) dxdy = 0 .$$

Comme $U_1 - U_2$ est de classe C^2, son gradient est nul sur la boule de centre O et de rayon R, et $U_1 - U_2$ y est constante.

Réciproquement, on vérifie que si U est solution du problème de Neumann précédent, alors $U + Cte$ l'est également.

4.4.3 Existence d'une solution par la méthode de séparation des variables

Puisque l'on travaille sur un cercle, on utilise des coordonnées polaires de centre O. Au lieu de chercher directement une fonction harmonique $(x, y) \to U(x, y)$ solution du problème, on pose :

$$U(x, y) = U(r\cos\theta, r\sin\theta) = u(r, \theta).$$

et on détermine d'abord u.

■ Les calculs conduits au paragraphe 4.3.2 amènent encore à considérer (au moins formellement) à une constante additive près :

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos((n\theta) + B_n \sin(n\theta))).$$

Tenant compte de la relation immédiate :

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta)$$

on voit qu'il faut enfin, pour que la condition de Neumann soit vérifiée, que :

$$f(\theta) = \sum \frac{n}{R} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

On choisira donc pour nombres nA_n/R et nB_n/R les coefficients de Fourier de f (on a $A_0 = 0$ à cause de la condition nécessaire sur f obtenue initialement) et l'on est finalement conduit à envisager pour solution de notre problème la fonction :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \cos n\theta + \frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt \sin n\theta\right).$$

Cette expression précédente peut également s'écrire :

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{R}{n\pi} \cos n(\theta - t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} f(\theta - t) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{R}{n\pi} \cos nt \, dt .$$

En effet, la fonction f étant continue et 2π-périodique est bornée, et il est clair que, pour $0 \leqslant r \leqslant R$, la série figurant ci-dessus sous le signe intégral est uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$, ce qui justifie la permutation des symboles de sommation et d'intégration. La seconde expression obtenue résulte alors de la première à l'aide du changement de variable $t' = \theta - t$.

■ On s'intéresse maintenant à la fonction P suivante, définie pour tout couple (x, t) de nombres réels tels que $-1 < x < 1$ et appelée **noyau de Poisson** du problème de Neumann relatif au cercle :

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\pi} \cos nt .$$

Par dérivation terme à terme de cette série entière en x, on a donc :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \cos nt = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left[e^{it} \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{it})^n \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \text{Re} \frac{e^{it}}{1 - xe^{it}} = \frac{\cos t - x}{\pi(x^2 - 2x \cos t + 1)}.$$

Par intégration, on obtient alors :

$$P(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos t + 1).$$

Finalement, on dispose de la formule suivante pour $u(r, \theta)$:

$$u(r, \theta) = R \int_0^{2\pi} f(\theta - t) \, P\left(\frac{r}{R}, t\right) dt$$

$$= -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta - t) \ln\left(\frac{r^2 - 2rR \cos t + R^2}{R^2}\right) dt.$$

ou, en coupant le logarithme et en utilisant la nullité, l'intégrale de f sur $[0, 2\pi]$:

$$u(r, \theta) = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta - t) \ln(r^2 - 2rR \cos t + R^2) dt$$

$$u(r, \theta) = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \ln(r^2 - 2rR \cos(\theta - t) + R^2) dt.$$

Revenant en coordonnées cartésiennes, cette dernière formule s'écrit aussi :

$$U(x, y) = -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\ln(x^2+y^2-2R\,(x\cos t+y\sin t)+R^2)\mathrm{d}t.$$

Comme pour le problème de Dirichlet, il resterait maintenant à voir si cette fonction est bien solution du problème de Neumann que l'on s'était donné au départ.

4.5 Le potentiel newtonien et l'équation de Poisson

On sait, en mécanique, que les forces de gravitation exercées sur un point quelconque par un corps de volume V et de masse volumique ρ proviennent d'un champ de gravitation g dérivant d'un potentiel de gravitation Φ. En un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace, le **potentiel de gravitation** exercé par ce corps D est égal à :

$$\Phi(M_0) = -G\iiint_D \frac{\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$= -G\iiint_D \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{M_0M}$$

où G désigne la constante de la gravitation (égale à $6{,}67.10^{-11}$ S.I.) et où la fonction de masse volumique ρ, évidemment nulle à l'extérieur du corps considéré, sera supposée continue sur celui-ci et de classe C^1 à l'intérieur de celui-ci.

On établit alors en mécanique les relations suivantes :

$$g = -\vec{\nabla}\Phi\ ,$$
$$\mathrm{div}\ g = -4\pi G\rho.$$

Puisque la divergence du gradient d'une fonction numérique de plusieurs variables n'est autre que son laplacien, on déduit de ces deux relations que :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho.$$

On dit alors que Φ est solution de l'équation de Poisson et puisque $\rho = 0$ à l'extérieur du corps considéré, on a $\Delta\Phi = 0$ en tout point extérieur de celui-ci, ce qui signifie que le potentiel de gravitation Φ créé par un corps est harmonique à l'extérieur de celui-ci.

Exemple : potentiel newtonien créé par une boule lorsque ρ ne dépend que de r.

On considère la boule B de centre O et de rayon R et l'on suppose que sa masse volumique $\rho(x, y, z) = \rho(r)$ ne dépend que de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Pour évaluer le potentiel newtonien qu'elle crée en un point M_0, nous allons supposer (ce qui ne change rien vu la symétrie du problème) que celui-ci appartient à l'axe Oz et qu'il a donc pour coordonnées $(0, 0, r_0)$. On calcule alors l'intégrale précédente, mais en passant en coordonnées sphériques, ce qui revient à poser :

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ ,$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi\ ,$$
$$z = r\cos\theta\ .$$

Le jacobien de cette transformation étant égal à $r^2\sin\theta$, on obtient donc :

$$\Phi(M_0) = -G\iiint_B \frac{\rho(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-r_0)^2}}$$

$$= -G\int_0^R\int_0^\pi\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2\rho(r)\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-2r_0r\cos\theta+r_0^2}}.$$

On intègre d'abord en ϕ, puis un simple calcul conduit à :

$$\Phi(M_0) = -\frac{2\pi G}{r_0}\int_0^R r\rho(r)\left[\sqrt{r^2-2r_0r\cos\theta+r_0^2}\,\right]_0^\pi \mathrm{d}r$$

$$= -\frac{2\pi G}{r_0}\int_0^R r\rho(r)[|r+r_0|-|r-r_0|]\mathrm{d}r.$$

Il convient alors de distinguer suivant que M_0 est extérieur ou intérieur à la boule B.

- Si M_0 est extérieur à la boule, c'est-à-dire si $r_0 \geqslant R$, on a en notant m la masse de la boule :

$$\Phi(M_0) = -\frac{4\pi G}{r_0}\int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{mG}{r_0}.$$

On remarque que ce potentiel est égal à celui que créerait la même masse m située ponctuellement au centre 0 de la boule B considérée.

- Si M_0 et intérieur à la boule, c'est-à-dire si $r_0 \leqslant R$, on a :

$$\Phi(M_0) = -\frac{4\pi G}{r_0}\int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r - 4\pi G\int_0^R r\rho(r)\,\mathrm{d}r.$$

On vérifie que Φ est continue sur l'espace, y compris sur la sphère de centre O et de rayon R et l'on vérifie par un simple calcul de dérivées que :

— $\Delta\Phi = 0$ à l'extérieur à la boule (Φ est harmonique à l'extérieur de la boule),

— $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ à l'intérieur de la boule, et en fait partout puisque $\rho = 0$ à l'extérieur de la boule (Φ vérifie donc l'équation de Poisson).

5. Théorie spectrale et séparation des variables

Pour de nombreuses équations aux dérivées partielles abordées précédemment, c'est la méthode de séparation des variables (consistant à rechercher d'éventuelles solutions de la forme :

$$(x, y) \rightarrow u(x)v(y)\ ,$$

puis à en former des combinaisons linéaires éventuellement infinies en un sens à préciser) qui a souvent permis de déterminer les solutions recherchées.

Le succès théorique (et également pratique pour de nombreux cas particuliers simples) de cette méthode repose sur les fondements que nous exposons maintenant. On a vu, dans les paragraphes précédents, que la recherche de solutions de la forme

$$(x, y) \rightarrow u(x)v(y)$$

vérifiant des conditions aux limites imposées conduisait en général à la résolution d'équations différentielles, l'une d'inconnue u, l'autre d'inconnue v, l'une de ces deux fonctions au moins étant de plus astreinte à vérifier des conditions aux limites. Comme on l'a déjà indiqué, il s'agit en fait de résoudre ce qu'il est convenu d'appeler un problème de Sturm-Liouville, que nous définissons ci-dessous de façon plus précise.

Définition 2.

Soient p, q, r trois fonctions à valeurs réelles continues sur un segment $[a, b]$, la fonction p étant de classe C^1 sur $[a, b]$ et les fonctions p et r étant à valeurs strictement positives sur $[a, b]$.

Soient (A, B) et (C, D) deux couples de nombres réels distincts de (0,0).

On appelle alors **problème de Sturm-Liouville** régulier associé à ces données la recherche des nombres réels λ et des solutions non nulles y de l'équation différentielle du second ordre :

$$(p(t)y')' + q(t)y + \lambda r(t)y = 0$$

qui vérifient de plus les conditions

$$Ay(a) + By'(a) = 0$$

et

$$Cy(b) + Dy'(b) = 0.$$

Exemple : Le plus simple des problèmes de Sturm-Liouville déjà abordés est le suivant :

$$y'' + \lambda y = 0$$

avec $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$,
dont les solutions sont les nombres

$$\lambda = n^2$$

et les fonctions associées

$$y(t) = C_n \sin nt$$

où n désigne un nombre entier naturel non nul et C_n une constante réelle.

De plus, toute fonction f, continue et de classe C^1 par morceaux sur $[0, \pi]$ qui vérifie de plus les deux conditions aux limites $f(0) = f(\pi) = 0$, peut être développée en série normalement convergente sous la forme :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \sin nx.$$

Cela n'est ici qu'une conséquence du théorème de convergence normale de Dirichlet sur les séries de Fourier, appliqué à la fonction f supposée prolongée sur $\mathbb{R}$ de façon impaire et 2π-périodique.

Nous verrons plus loin que les résultats de ce problème particulier se généralisent en fait aux problèmes de Sturm-Liouville réguliers.

Auparavant, donnons une interprétation de notre problème de Sturm-Liouville en termes de valeurs propres et de fonctions propres. A cet effet, on désignera par :

- S l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant de plus les deux conditions aux limites :

$$Ay(a) + By'(a) = 0$$

et

$$Cy(b) + Dy'(b) = 0.$$

- L l'application linéaire définie de l'espace vectoriel S défini ci-dessus dans l'espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ par la formule :

$$Ly(t) = \frac{-1}{r(t)}[(p(t)y'(t))' + q(t)y(t)].$$

Le problème est alors de rechercher les nombres réels λ pour lesquels existent des solutions non nulles y appartenant à S de l'équation $Ly = \lambda y$.

Si l'on met de côté le fait que L n'est pas un endomorphisme d'espaces vectoriels, mais une application linéaire de S dans $C([a, b], \mathbb{R})$, on voit qu'il s'agit de rechercher les valeurs propres λ et les fonctions propres associées y de L.

Proposition 5.

Dans le contexte introduit dans ce paragraphe 5, *les sous-espaces propres de l'application linéaire L sont tous de dimension 1.*

Démonstration. ◊

Un sous-espace propre $E(\lambda)$ est par définition de dimension au moins 1 et il est ici de dimension au plus 2, car l'égalité :

$$Ly = \lambda y$$

implique que y est solution de l'équation différentielle :

$$py'' + p'y' + (q + \lambda r)y = 0,$$

et l'on sait par le théorème de Cauchy-Lipschitz que les solutions de cette équation différentielle homogène du second ordre forment un espace vectoriel de dimension 2.

Enfin, la dimension d'un sous-espace propre $E(\lambda)$ est exactement égale à 1 ici car, si elle était égale à 2, les éléments de $E(\lambda)$ seraient exactement (par égalité des dimensions) les solutions de l'équation différentielle

$$py'' + p'y' + (q + \lambda r)y = 0\,;$$

autrement dit, toute solution de cette équation appartiendrait à S et vérifierait les deux conditions aux limites :

$$Ay(a) + By'(a) = 0$$

$$Cy(b) + Dy'(b) = 0.$$

Cela est impossible car la solution vérifiant les conditions initiales

$$y(a) = A$$

et

$$y'(a) = B$$

ne vérifie pas la première relation puisque $(A, B) \neq 0$. ◊

Proposition 6.

Dans le contexte introduit dans ce paragraphe 5, *l'application linéaire L est autoadjointe pour le produit scalaire défini sur S par :*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\,g(t)\,r(t)\,dt.$$

Démonstration. ◊

L'énoncé signifie simplement que, pour tout couple (f, g) de S, on a l'égalité :

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle.$$

Celle-ci se vérifie par intégration par parties. On a en effet :

$$\langle Lf, g \rangle = -\int_a^b [(p(t)f'(t))' + q(t)\,f(t)g(t)dt]$$

$$= [-\,p(t)\,f'(t)g(t)]_a^b + \int_a^b p(t)f'(t)g'(t)dt - \int_a^b q(t)f(t)g(t)dt$$

et, si l'on suppose les constantes A et C non nulles (on étudie plus simplement encore le cas où A ou C est nulle), il vient :

$$\langle Lf, g \rangle = \frac{C}{D}\,p(b)\,fg(b) - \frac{A}{B}\,p(a)fg(a)$$

$$+ \int_a^b p(t)f'g'(t) - q(t)fg(t)dt.$$

On voit maintenant que f et g jouent des rôles symétriques et, en permutant f et g puis en remontant les calculs, on a bien l'égalité voulue. ◊

Ce résultat est intéressant car on connaît déjà, au moins dans le contexte des espaces euclidiens (il s'agit des espaces de dimension finie sur $\mathbb{R}$ munis d'un produit scalaire), le **théorème spectral classique** concernant les opérateurs autoadjoints :

— les valeurs propres sont réelles ;

— les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux ;

— la somme directe des sous-espaces propres est égale à l'espace entier.

On démontre ici de la même façon les deux premiers points, de façon élémentaire, mais le troisième point doit, par contre, être précisé, et sa démonstration est beaucoup plus difficile : c'est le **théorème spectral d'Hilbert-Schmidt**, dont on donne l'énoncé.

Proposition 7.

Dans le contexte introduit dans ce paragraphe 5, les valeurs propres de l'application linéaire L définies sont simples et peuvent être rangées en une suite croissante

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

tendant vers $+\infty$.

Si l'on désigne par e_n *une fonction propre unitaire (autrement dit de norme 1 au sens de la norme dérivant du produit scalaire précédent) appartenant à S et associée à la valeur propre* λ_n *de L, la suite* (e_n) *est orthonormale et l'on a alors pour toute fonction f appartenant à S (et, plus généralement, pour toute fonction continue et de classe* C^1 *par morceaux sur* $[a, b]$ *vérifiant les deux conditions aux limites :*

$$Af(a) + Bf'(a) = 0$$

et

$$Cf(b) + Df'(b) = 0$$

l'égalité suivante, où $a \leqslant x \leqslant b$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} < e_n, f > e_n(x).$$

De plus, la convergence de cette série est absolue et uniforme sur $[a, b]$.

Dans les exemples étudiés dans les paragraphes précédents (§ 2 à § 4), c'est en fait ce théorème que l'on a démontré élémentairement à chaque fois, étant entendu que celui-ci est susceptible de généralisations (théorème dit de **Weyl-Stone-Titchmarch-Kodaïra)** permettant l'étude des problèmes singuliers de Sturm-Liouville qui apparaissent lorsque le segment d'étude $[a, b]$ est remplacé par un intervalle réel quelconque I, non nécessairement fermé ou non nécessairement borné.

Les suites des fonctions (e_n) qui s'introduisent ainsi conduisent à ce qu'il est convenu d'appeler en mathématiques les fonctions spéciales, et qui comprennent notamment toutes les familles de polynômes orthogonaux usuelles (Legendre, Hermite, Laguerre, Tchebichev, etc.) et les fonctions de Bessel qui s'introduisent avec le problème de Sturm-Liouville singulier associé à l'équation suivante (où v désigne un nombre réel arbitrairement donné) :

$$(xy')' - \frac{v^2}{x} y + \lambda xy = 0.$$

On donne maintenant, pour finir, l'exemple d'un problème de Sturm-Liouville singulier conduisant à l'utilisation de ces fonctions de Bessel.

Exemple : membrane vibrante d'un tambour circulaire

■ Considérons la vibration de la membrane d'un tambour circulaire que nous assimilerons au repos au disque de centre O et de rayon R du plan. La cote $U(x, y, t)$ de cette membrane au point de coordonnées (x, y) à l'instant t vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

— avec la **condition aux limites** :

$$U(R\cos\theta\ ,\ R\sin\theta,\ t) = 0$$

pour θ quelconque et $t \geqslant 0$,

— avec les **conditions initiales** :

$$U(x, y, 0) = f(x, y)$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, y, 0) = 0$$

où la fonction f est supposée suffisamment régulière et nulle sur la circonférence de centre O de rayon R.

Nous allons rechercher les solutions en passant en coordonnées polaires, en prenant la nouvelle fonction inconnue définie par :

$$u(r, \theta, t) = U(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta\ ,\ t).$$

Celle-ci vérifie donc, outre la condition aux limites $u(R, \theta, t) = 0$ et des conditions initiales faciles à préciser, l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right).$$

■ Pour simplifier, nous en chercherons seulement les solutions possédant la symétrie de révolution : le dernier terme de l'équation ci-dessus est alors identiquement nul et on applique dans ce contexte la **méthode de séparation des variables.**

On recherche donc des solutions de la forme :

$$(r, t) \to u(r)\,v(t)$$

et telles que :

$$u(R) = 0.$$

Il est facile de voir qu'une telle fonction est solution si, et seulement si, u et v vérifient les équations :

$$ru'' + u' + \lambda ru = 0$$

$$v'' = \mu v$$

avec les conditions $\mu = -\lambda v^2$ et $u(R) = 0$.

On voit facilement que la fonction u s'obtient par résolution d'un problème de Sturm-Liouville singulier sur le segment $[0, R]$ puisque la fonction r s'annule en 0.

La condition aux limites est simplement $u(R) = 0$ (la condition en 0 se limitant à exiger la continuité de u en ce point singulier pour le problème).

■ Ce problème de Sturm-Liouville est en fait bien connu et on peut le résoudre explicitement. On vérifie tout d'abord que le nombre réel λ est nécessairement positif. En multipliant la première de ces équations différentielles par u, on obtient en effet en intégrant sur $[0, R]$:

$$\int_0^R (ru(r)u''(r) + u(r)\,u'(r) + \lambda ru^2(r))\mathrm{d}r = 0.$$

Par intégration par parties sur les deux premiers termes, il vient alors :

$$\left[ru(r)u'(r)\right]_0^R - \int_0^R r\,u'^2(r)\mathrm{d}r + \lambda\int_0^R ru^2(r)\mathrm{d}r = 0\,.$$

Et comme le crochet est nul, la positivité de λ en résulte.

On posera donc $\lambda = \omega^2$ et on constate que la fonction $r \rightarrow u(r/\omega)$ est solution de l'équation de Bessel :

$$ry'' + y' + ry = 0.$$

Les seules solutions continues en 0 de cette équation de Bessel d'indice 0 sont de la forme

$$r \rightarrow CJ_0(r)$$

où C est une constante réelle arbitraire. Ainsi, on a :

$$u(r) = CJ_0(\omega r)$$

et comme u doit s'annuler en $r = R$, on voit que les nombres ωR sont des zéros de J_0. Comme on sait que les zéros des fonctions de Bessel (et de J_0 en particulier) forment une suite, que nous notons ici (x_n), de nombres réels strictement positifs, on voit que ω est nécessairement de la forme x_n/R.

Par conséquent, les solutions multiplicatives de l'équation

$$(r, t) \rightarrow u(r)\,v(t)$$

vérifiant $u(R) = 0$ sont de la forme

$$(r, t) \rightarrow J_0(rx_n/R)(A_n \cos(vtx_n/R) + B_n \sin(vtx_n/R))\,.$$

■ Pour achever le problème, il reste à chercher des **solutions par superposition**, donc de la forme :

$$u(r, t) = \sum J_0\left(\frac{rx_n}{R}\right)\left(A_n \cos\frac{vtx_n}{R} + B_n \sin\frac{vtx_n}{R}\right)$$

et vérifiant les conditions initiales requises.

On choisit à cet effet $B_n = 0$ et il reste à savoir si l'on peut déterminer des nombres A_n tels que l'on ait pour $0 \leqslant r \leqslant R$:

$$\phi(r) = \sum A_n\, J_0\left(\frac{rx_n}{R}\right).$$

Un tel choix des A_n est effectivement possible lorsque ϕ est de classe C^2 sur $[0, R]$ (mais il suffirait en fait qu'elle soit continue et de classe C^1 par morceaux sur $[0, R]$) et nulle en R, d'après l'extension signalée plus haut du théorème de Hilbert-Schmidt au cas de notre problème singulier de Sturm-Liouville.

Références bibliographiques

[1] REINHARD (H.). – *Équations différentielles,* Gauthier-Villars.

[2] REINHARD (H.). – *Équations aux dérivées partielles,* Dunod.

[3] YOSIDA (K.). – *Équations différentielles et intégrales,* Dunod.

[4] SCHWARTZ (L.). – *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques,* Hermann.

[5] COURANT-HILBERT. – *Methods of mathematical physics,* Interscience Publishers.

Présentation des systèmes dynamiques

par **Bernard RANDÉ**
Ancien élève de l'école normale supérieure de Saint-Cloud
Docteur en mathématiques
Agrégé de mathématiques
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis

Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels que assez tardivement. Ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique, puisque l'on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles.

Schématiquement, un tel système est la donnée d'une loi d'évolution qui, à partir de conditions initiales, détermine le futur d'un phénomène. Le paradigme

en est l'équation différentielle, qui exprime une loi régissant, elle-même, l'évolution temporelle d'un phénomène convenablement paramétré. Cette loi détermine l'évolution du système lorsque les paramètres sont connus à un certain instant. Sous cette forme, le système dynamique ne peut rendre compte que d'une loi déterministe.

La résolution explicite, ou même approchée, d'une équation différentielle, est en général impossible. Dans une large mesure, l'étude des systèmes qui nous occupent vise à formuler les termes d'une étude qualitative des phénomènes.

Dans le cadre de cet article, nous nous contenterons d'introduire le langage nécessaire, en restant dans un cadre élémentaire. Nous n'aborderons pas vraiment le problème fondamental de la perturbation dans un système dynamique ou d'un système dynamique, qui fait l'objet d'un article séparé, dont la lecture suppose la connaissance des notions développées dans le présent article

Le but de la partie 1 est de fournir des exemples d'équations différentielles sur lesquels est présenté informellement le langage. Celui-ci sera précisé dans le cadre de la partie 2, où sont aussi fournis les outils élémentaires sur les équations différentielles. La partie 3 donne l'occasion de mettre en œuvre ces outils. La partie 4 dégage, sans y insister, les propriétés fondamentales, qui permettent d'introduire les systèmes dynamiques discrets. Dans la partie 5, on trouvera traités des exemples très simples de systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}$.

1. Exemples élémentaires

1.1 Exemple d'une équation vectorielle linéaire à coefficients constants

Soit A une matrice carrée réelle, de taille p. On considère l'équation différentielle :

(E) $$X' = AX.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont, par définition, les fonctions X de $\mathbb{R}$ vers $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, satisfaisant à l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X'(t) = AX(t).$$

Nous savons parfaitement résoudre cette **équation différentielle linéaire à coefficients constants, de taille** p**, d'ordre** 1. La solution générale en est de la forme :

$$t \mapsto X(t) = e^{tA}C \ ,$$

où C est un élément arbitraire de $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

■ Si l'on cherche plutôt à **résoudre** le **problème de Cauchy** où l'on impose en outre à X de prendre, pour la valeur t_0 de la variable, la valeur X_0, on voit que C est déterminé par l'égalité :

$$X_0 = e^{t_0 A}C,$$

soit $C = e^{-t_0 A}X_0$

et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0.$$

On remarque au passage qu'il existe une, et une seule, solution au problème de Cauchy.

Nous prenons désormais $t_0 = 0$. La variable t désignant souvent une variable temporelle, nous dirons que **la condition initiale est fixée à l'instant 0**. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = e^{tA}X_0.$$

L'application $t \mapsto e^{tA}X_0$ est à valeurs dans $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Pour se conformer à l'usage, on identifiera librement cet espace vectoriel à $\mathbb{R}^p$. Ainsi, $t \mapsto e^{tA}X_0$ est un arc paramétré de $\mathbb{R}^p$, appelé **trajectoire** de X_0. Il s'agit donc d'une notion **cinématique**, puisque cette application décrit la position de X à l'instant t.

Il arrive que l'on s'intéresse seulement à l'ensemble des positions atteintes par X. On appellera **orbite** de X_0 cette courbe, qui n'est rien d'autre que l'image de l'application X.

En réalité, $X(t)$ dépend, outre de t, de la position initiale X_0. Pour bien marquer cette dépendance, nous poserons :

$$\phi(t, X_0) = e^{tA}X_0.$$

Ainsi, $t \mapsto \phi(t, X_0)$ est la solution du problème de Cauchy :

$$X' = AX \ ; \ X(0) = X_0.$$

Pour rendre plus parlante l'application ϕ, on peut considérer que l'on soumet $\mathbb{R}^p$, constitué de points matériels, à une loi reflétée par l'équation différentielle $X' = AX$. Si l'on observe un point X_0 de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire un point matériel qui, à l'instant initial, occupe cette position, sa position à l'instant t sera $\phi(t, X_0)$. En particulier, si l'on se donne un certain nombre de valeurs de X_0 (« position du système » à l'instant initial), la famille des $\phi(t, X_0)$ pour un certain t décrit la position du système à l'instant t, c'est-à-dire, en quelque sorte, sa photographie à cet instant. Si l'on fixe une seule valeur de X_0, et que l'on fait au contraire varier t, on obtient l'évolution temporelle d'un point matériel.

L'application ϕ, qui contient simultanément l'ensemble des informations précédentes, est appelée **flot de l'équation différentielle** $X' = AX$.

Pour proposer quelques **illustrations**, nous fixons désormais A, en prenant $p = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On obtient, de suite :

$$\phi(t, X_0) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} X_0$$

Posons :

$$X_0 = (x_1, x_2) \text{ et } \phi(t, X_0) = (\phi_1(t, X_0), \phi_2(t, X_0)).$$

Nous avons ici identifié les matrices colonnes de taille 2 aux éléments de $\mathbb{R}^2$. Ainsi :

$$\phi_1 = e^t x_1 \ ; \ \phi_2 = e^{2t} x_2 .$$

L'étude de cet arc paramétré ne présente aucune difficulté :

— si $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, l'orbite est l'arc de la parabole $\phi_2 = \frac{x_2}{x_1^2}\phi_1^2$, limité à la portion de cette parabole incluse dans le premier quadrant (ouvert) ;

— on obtient trois autres études identiques selon les signes de x_1 et x_2, supposés non nuls ;

— si x_1 ou x_2 est nul, sans que les deux le soient, on obtient une demi-droite ;

— enfin, si, $x_1 = x_2 = 0$, il s'agit du point (0,0).

Visualiser globalement l'**application** ϕ présente quelques difficultés.

● Une première idée est de visualiser l'orbite d'un point X_0 ; mais cela ne rend pas compte de la cinématique du mouvement.

● On peut en tout cas faire figurer la « **flèche du temps** » à l'extrémité de cette trajectoire, qui indique le sens de parcours lorsque le temps croît. Cette façon de faire peut être reproduite sur un même dessin pour quelques valeurs de X_0, suffisamment diverses pour être significatives des différentes trajectoires. C'est ce que propose la figure **1** ; sur une même orbite, les positions qui sont du même côté de X_0 que la flèche du temps sont dans l'avenir de X_0, les autres sont dans son passé.

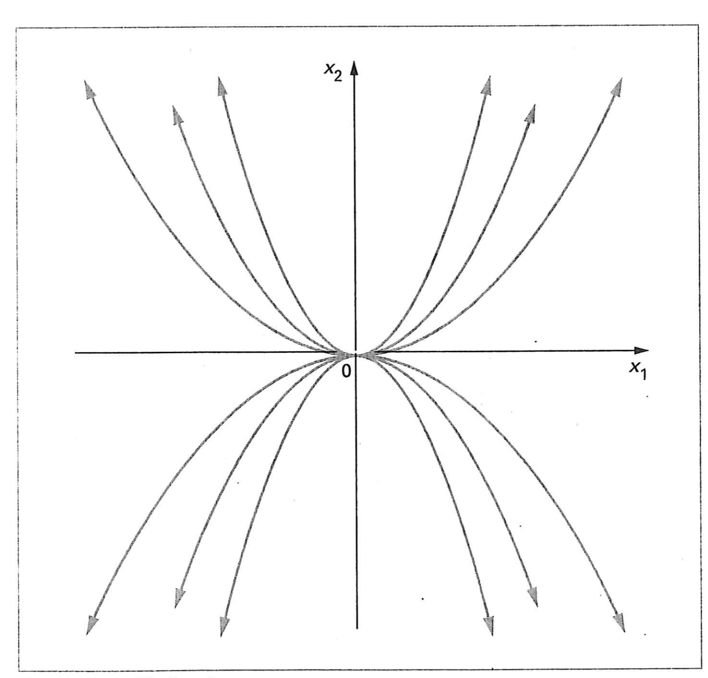


Figure 1 – Flèche du temps

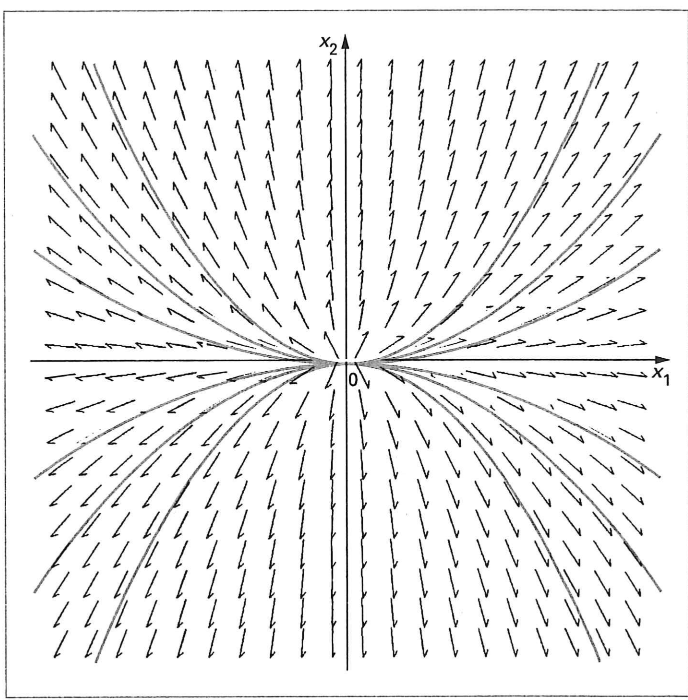


Figure 2 – Éléments de contact

● Une autre façon de procéder est d'introduire le **champ de vecteurs** $X \mapsto AX$. On le visualise ordinairement par un vecteur dont l'origine est placée à la position X. Pratiquement, on ne place, bien entendu, que quelques-uns de ces vecteurs ! Puisque $X'(t)$ dirige la tangente à la trajectoire $t \mapsto X(t)$ (ce n'est rien d'autre que sa vitesse), l'égalité $X'(t) = AX(t)$ exprime que, en chaque point d'une trajectoire, la vitesse est égale au vecteur du champ en ce point. Compte tenu que la valeur exacte de $X'(t)$ nous intéresse moins que sa direction, et aussi pour des questions de lisibilité, nous ne visualiserons pas le champ lui-même, mais seulement, par des fléchettes, la direction de AX. On parle alors d'**éléments de contact**. Bien entendu, lorsque $AX = 0$, on ne fait rien figurer (la direction n'est pas définie).

● La figure **2** propose à la fois des éléments de contacts et des orbites. Nous utiliserons cette présentation dans la suite. On dit que l'on a **visualisé le portrait de phase** de l'équation différentielle $X' = AX$. Cette possibilité est offerte pour de petites valeurs de p :

— comme ici, lorsque $p = 2$;

— éventuellement, par un dessin perspectif, lorsque $p = 3$.

Le cas, très simple, où $p = 1$, sera étudié en détail dans le paragraphe 5.1.

L'espace $\mathbb{R}^p$ dans lequel arrivent les solutions $t \mapsto \phi(t, X_0)$ de l'équation différentielle est appelé **espace des phases**.

1.2 Exemple d'une équation scalaire d'ordre deux, linéaire et à coefficients constants

Considérons l'**équation différentielle scalaire, d'ordre 2, linéaire et à coefficients constants** :

(F) $$x'' + x = 0 .$$

Ses solutions sont, par définition, les fonctions x, deux fois dérivables, de $\mathbb{R}$, vers $\mathbb{R}$, satisfaisant à l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x''(t) + x(t) = 0 .$$

Bien que nous puissions parfaitement résoudre cette équation, nous ne le ferons pas dans un premier temps.

Si x est une solution, introduisons :

$$X(t) = (x(t), x'(t)) .$$

Nous voyons que, alors, X vérifie :

$$X'(t) = (x'(t), x''(t)) = (x'(t), -x(t)) ,$$

donc, en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et en identifiant les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ aux matrices colonnes qui les repèrent dans la base canonique, que :

$$X'(t) = AX(t) .$$

Réciproquement, si $X = (x, y)$ est solution de l'équation différentielle vectorielle de taille 2 et d'ordre 1 :

(E) $$X' = AX,$$

on a :

$$y = x' \quad \text{et} \quad x'' + x = 0 .$$

Il y a donc une bijection entre l'ensemble des solutions x de l'équation scalaire (F) d'ordre 2 initiale et l'ensemble des solutions X de l'équation vectorielle (E) d'ordre 1, mais de taille 2. Cette bijection est l'application :

$$x \mapsto (x, x') .$$

Bien que, dans l'optique d'une étude pratique, il soit souvent concevable de conserver l'équation scalaire $x'' + x = 0$ sous sa forme initiale, le point de vue théorique réclame la mise sous la forme équivalente du système d'ordre 1 (mais de taille 2) $X' = AX$. Pour le comprendre, il faut mesurer ce que doit être l'espace des phases. Si l'on conserve l'équation du second ordre $x'' + x = 0$, il serait naturel de considérer que l'espace des phases est l'espace d'arrivée de l'application x, c'est-à-dire $\mathbb{R}$. Pourtant, une solution est déterminée par le couple $(x(0), x'(0))$, et non pas seulement par la valeur $x(0)$. Cette situation correspond à beaucoup de configurations de la mécanique, où la loi du mouvement est de la forme $x'' = f(x, x')$, auquel cas l'avenir et le passé du point matériel sont déterminés, non seulement par sa position « géographique » à l'instant initial, mais encore par sa vitesse à cet instant : autrement dit, par la valeur $(x(0), x'(0))$, qui correspond bien à un point de $\mathbb{R}^2$. Nous reviendrons amplement sur de tels exemples dans la suite.

Dans ces conditions, l'espace des phases est l'espace d'arrivée de X, soit $\mathbb{R}^2$, que l'on désignera aussi par l'espace des (x, x') pour en rappeler l'origine. La nomenclature introduite dans le paragraphe 1.1 s'applique sans changement. Pour tracer le **portrait de phase**, nous pouvons, dans le cas qui nous occupe, résoudre explicitement l'équation différentielle. On obtient alors l'expression de X :

$$X(t) = (x(0)\cos t + x'(0)\sin t, -x(0)\sin t + x'(0)\cos t) ,$$

soit, en termes de flot :

$$\phi(t, X_0) = (x_1 \cos t + x_2 \sin t, -x_1 \sin t + x_2 \cos t)$$

lorsque $X_0 = (x_1, x_2)$.

Les orbites sont alors faciles à décrire. Si l'on munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique, il s'agit :

— de cercles centrés en (0,0), lorsque $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$;

— de l'origine lorsque $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

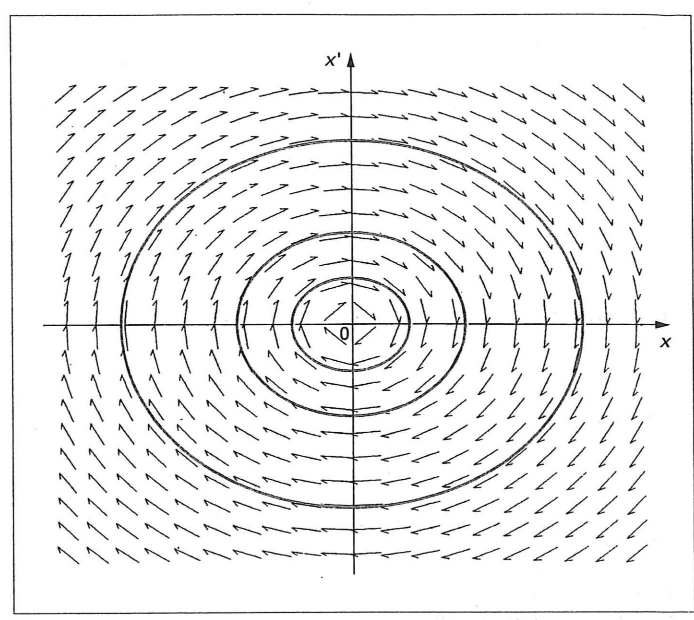


Figure 3 – Portrait de phase dans le plan des (x, x')

La figure **3** rend compte du portrait de phase.

Il faut bien noter que le champ d'éléments de contacts donne la direction de la « vitesse » dans l'espace des phases, c'est-à-dire la direction de X', mais n'a rien à voir avec la direction de la vitesse du mouvement $t \mapsto x(t)$ (qui d'ailleurs, dans le cas présent, est à valeurs dans la droite réelle). En fait, notre étude se situera, pour l'essentiel, dans l'espace des phases, et non pas dans l'espace « géographique ».

1.3 Exemple d'une équation scalaire d'ordre deux, non linéaire, autonome

Considérons l'équation différentielle :

(F) $$x'' + x' + \sin x = 0 .$$

On dit qu'elle est **autonome** ; cela signifie qu'elle est de la forme $x'' = f(x, x')$, par opposition à l'équation différentielle scalaire d'ordre 2 la plus générale $x'' = g(t, x, x')$, où la loi qui régit l'évolution du phénomène dépend du temps. Bien entendu, le fait qu'une équation différentielle autonome traduise une loi indépendante de t ne signifie nullement que ses solutions, elles, soient constantes au cours du temps. L'exemple du paragraphe 1.2, dans lequel l'équation est autonome (et en outre linéaire), doit nous en convaincre.

Cette équation différentielle autonome d'ordre 2 équivaut à un système vectoriel autonome de taille 2, et d'ordre 1. La démarche est analogue à celle suivie dans le paragraphe 1.2. En posant $X = (x, x')$, on voit que X est solution de :

$$X' = F(X) \quad \text{avec} \quad F(x_1, x_2) = (x_2, -\sin x_1 - x_2)$$

et réciproquement.

L'équation différentielle **vectorielle** (ou encore **système différentiel**) $X' = F(X)$ est naturellement qualifiée elle aussi d'autonome.

Dans le cas présent, il n'est pas possible d'expliciter le flot à l'aide des seules fonctions élémentaires, ni même en y adjoignant le sym-

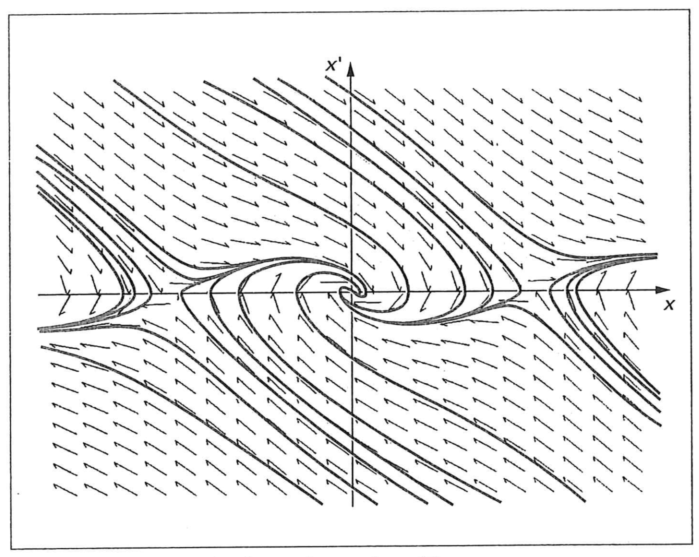


Figure 4 – Portrait de phase du système (F)

bole $\int$ de primitivation. Cela ne signifie pas que l'on ne sait pas étudier le flot. Le portrait de phase de la figure **4** est obtenu à l'aide de méthodes numériques de résolution approchée.

2. Outils mathématiques

Dans ce paragraphe 2, nous introduisons le matériel relatif aux équations différentielles. Nous donnons de manière formelle le langage des systèmes dynamiques dans le cadre du flot d'une équation différentielle autonome.

2.1 Théorème de Cauchy et Lipschitz

Définition 1.

Soient $\boldsymbol{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie p, Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}\times\boldsymbol{E}$ et f une application de Ω vers $\boldsymbol{E}$. On appelle solution de l'équation différentielle d'ordre 1 et de taille p :

(F) $$X' = f(t, X)$$

toute application X, de source un intervalle I de $\mathbb{R}$, de but $\boldsymbol{E}$, dérivable sur I, telle que, pour tout $t \in I$, $(t, X(t))$ appartienne à Ω, et telle que, de plus :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = f(t, X(t)).$$

Une telle solution sera désignée par (I, X).

Soit, en outre, (t_0, X_0) un élément de Ω, appelé condition initiale. On appelle solution au problème de Cauchy :

$$X'(t) = f(t, X(t)) \; ;$$
$$X(t_0) = X_0$$

toute solution (I, X) de l'équation (F) telle que, de plus, t_0 appartienne à I et telle que $X(t_0) = X_0$.

Le langage suivant est d'usage. La variable t est appelée la **variable temporelle** ; t_0 est appelé **instant initial**, X_0 **valeur initiale**, I **intervalle de temps**. Bien entendu, ce langage peut varier en fonction des situations modélisées. Nous verrons, dans la suite, que nous emprunterons en général la terminologie à la physique et, plus précisément, à la mécanique classique.

Notons $S((\mathrm{F}), t_0, X_0)$ l'ensemble des solutions du problème de Cauchy précédent.

Si (I, X) appartient à $S((\mathrm{F}), t_0, X_0)$, il est facile d'obtenir d'autres solutions : en restreignant X à un sous-intervalle J de I, avec la contrainte que J contienne t_0. Il est clair que la restriction Y de X à J définit encore un élément (J, Y) de $S((\mathrm{F}), t_0, X_0)$. On dira, dans ces conditions, que (X, I) prolonge (Y, J), et on notera cette situation :

$$(Y, J) \preccurlyeq (X, I)$$

Le symbole $\preccurlyeq$, qui permet de comparer deux applications, ne doit pas être confondu avec le symbole $\leqslant$, qui représente l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$.

Il est très facile de constater que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre, non total. Considérons le plus grand élément (I, X) de $S((\mathrm{F}), t_0, X_0)$ (pour la relation $\preccurlyeq$), s'il existe. Il vérifie la **propriété** suivante.

Tout élément (J,Y) de $S((\mathrm{F}), t_0, X_0)$ est la restriction de (I, X), ce qui signifie que $J \subset I$ et que, pour tout t dans J :

$$Y(t) = X(t).$$

Théorème 1 (de Cauchy et Lipschitz).

Avec les notations de la définition 1, supposons f de classe C^1 sur Ω. Il existe alors un unique plus grand élément (I, X) de $S((\mathrm{F}), t_0, X_0)$. De plus, l'intervalle I est ouvert.

En outre, soit $\boldsymbol{C}$ un compact de Ω. Pour tout $t_1 \in I$:

— il existe $t \geqslant t_1$ tel que $(t, X(t)) \notin \boldsymbol{C}$;

— de même, il existe $t' \leqslant t_1$ tel que $(t', X(t')) \notin \boldsymbol{C}$.

En particulier, (X, I) est certainement un élément maximal de l'ensemble des solutions de l'équation (F), ce qui signifie que l'on ne peut prolonger X en une solution de l'équation (F) à un intervalle strictement plus grand que I. Réciproquement, un élément maximal (I, X) de l'ensemble des solutions de l'équation (F) est plus grand élément de $S((\mathrm{F}), t_0, X(t_0))$ pour tout t_0 de I. De ce fait, on appelle souvent une telle solution une solution **maximale** (bien qu'elle vérifie une propriété meilleure).

■ Le théorème de Cauchy et Lipschitz rend compte d'une observation rendue naturelle par de nombreux exemples issus des sciences de la nature. Lorsque la loi d'évolution temporelle d'un système – loi résumée ici par l'application f, qui fournit l'équation différentielle régissant le phénomène – est connue, et est d'ordre 1, et lorsque le système est entièrement déterminé à un instant donné t_0 (par la valeur X_0), l'avenir et le passé du système sont entièrement déterminés. En vérité, cette constatation doit être approfondie à la lumière du théorème 1.

Tout d'abord, il est bien nécessaire que l'évolution du système soit régie par une équation différentielle. D'autre part, cette équation différentielle ne peut être absolument quelconque : si f est simplement supposée continue, le théorème est en défaut. Cette remarque met en évidence qu'une loi physique « déterministe » exprimée par une équation différentielle doit satisfaire certaines conditions de régularité.

■ Un autre aspect du théorème est la nature de I, qui reste en général inconnu. Il n'est en particulier nullement obligatoire que I soit égal à $\mathbb{R}$, même lorsque $\Omega = \mathbb{R}\times\boldsymbol{E}$. Nous indiquerons la dépendance de I par rapport aux conditions initiales en le notant, si besoin est, $I(t_0, X_0)$. Nous savons néanmoins que I est ouvert. Pour le déterminer, nous utiliserons souvent la dernière partie du théorème, qui peut s'exprimer en disant que le graphe de (I, X), dans tout avenir, quitte tout compact de Ω. Cela ne nous dit rien lorsque $\sup I = +\infty$. En revanche, supposons que $\sup I = b$ soit un

réel. Nous pourrons exploiter le résultat comme dans l'exemple suivant.

Exemple : supposons que $\Omega = \mathbb{R} \times \boldsymbol{E}$ et qu'une solution X soit bornée sur I. Autrement dit, $X(t)$ appartient à une certaine boule B de $\boldsymbol{E}$ pour tout t.

Montrons qu'alors $I = \mathbb{R}$. Dans le cas contraire, I admet une borne réelle ; supposons par exemple que c'est la borne supérieure b. En particulier, il existe un sous-ensemble compact $[t_0, b] \times B$ de $\mathbb{R} \times \boldsymbol{E}$ contenant le graphe de X dans l'avenir de t_0, ce qui est une contradiction.

■ Le théorème a une conséquence immédiate. Soient (J_1, Y_1) et (J_2, Y_2) deux éléments de S ((F), t_0, X_0). Ils sont prolongeables par (I, X). En particulier, si :

$$t \in J_1 \cap J_2 \,, \quad Y_1(t) = Y_2(t) = X(t) \,.$$

On exprime ceci par l'**unicité locale** des solutions du problème de Cauchy.

Désormais, nous ne nous intéresserons qu'à la plus grande solution du problème de Cauchy. Puisqu'elle dépend de la condition initiale, nous poserons :

$$X(t) = \phi(t, t_0, X_0) \,.$$

2.2 Régularité par rapport aux conditions initiales

Nous nous plaçons, avec les notations du paragraphe 2.1, sous les hypothèses du théorème 1. Nous disposons, pour chaque point (t_0, X_0) de Ω, de la plus grande solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} I(t_0, X_0) &\rightarrow \boldsymbol{E} \\ t &\mapsto \phi(t, t_0, X_0) \end{aligned}$$

Dans ces conditions, notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des (t, t_0, X_0) tels que $t \in I(t_0, X_0)$. L'application ϕ est définie sur $\mathcal{U}$. Supposons f de classe C^k, k étant dans $[1, +\infty]$. Il est clair que :

$$t \mapsto \phi(t, t_0, X_0) = X(t)$$

est de classe C^{k+1}.

En effet, X est dérivable sur I, donc continue. Comme $X'(t) = f(t, X(t))$, X' est continue, donc X est de classe C^1. La même relation prouve alors que X est de classe C^2, et une récurrence immédiate termine le raisonnement.

Cependant, nous ne connaissons rien *a priori* de la dépendance de ϕ par rapport aux conditions initiales. Le théorème 2 répond à cette question.

Théorème 2.
Avec les notations qui précèdent, supposons f de classe C^k, k étant dans $[1, +\infty]$. L'ensemble $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \boldsymbol{E}$. De plus, l'application ϕ est de classe C^k sur $\mathcal{U}$.

Ce théorème exprime essentiellement que, si l'on se donne deux conditions initiales proches, et deux instants proches en lesquels les solutions sont respectivement définies, les valeurs des solutions à un instant donné sont proches (continuité de ϕ) ; de façon plus générale, la dépendance de la solution par rapport à l'instant et aux conditions initiales est de même classe que f.

2.3 Cas des équations non scalaires

Une équation différentielle très générale, de la forme :

$$\text{(G)} \qquad x^{(q)} = g(t, x, x', \ldots, x^{(q-1)}) \,,$$

où g est une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \boldsymbol{E}^q$, est dite d'ordre q. Ses solutions sont les applications x, q fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\boldsymbol{E}$, telles que, pour tout t dans I, $(t, x, x', \ldots, x^{(q-1)})$ appartienne à Ω, et telles que, de plus :

$$\forall t \in I \quad x^{(q)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(q-1)}(t)) \,.$$

On se ramène au cas d'une équation scalaire d'ordre 1 en considérant l'application X, dérivable sur I et à valeurs dans $\boldsymbol{E}^q$, définie par :

$$X(t) = (x(t), x'(t), \ldots, x^{(q-1)}(t)) \;;$$

si x est solution de l'équation (G), X est alors solution de l'équation d'ordre 1 :

$$\text{(F)} \qquad X' = f(t, X) \,,$$

où :

$$f(t, x_0, \ldots, x_{q-1}) = (x_1, \ldots, x_{q-1}, g(t, x_0, \ldots, x_{q-1})) \,.$$

Ainsi, f est définie sur Ω et est de même classe que g. Réciproquement, si X est solution de l'équation (F), sa première composante sera solution de l'équation (G). Cette bijection entre ensemble des solutions de l'équation (F) et ensemble des solutions de l'équation (G) induit une bijection entre S ((F), t_0, X_0) et une partie de l'ensemble des solutions de l'équation (G) ; précisément, si

$$X_0 = (x_{0,0}, x_{0,1}, \ldots, x_{0,q-1}) \,,$$

la condition $X(t_0) = X_0$ équivaut à :

$$x(t_0) = x_{0,0}, \ldots, x^{(q-1)}(t_0) = x_{0,q-1} \,.$$

Ainsi, nous devons, pour une équation d'ordre q, formuler le problème de Cauchy par un q-uplet de conditions initiales :

$$x(t_0) = x_{0,0}, \ldots, x^{(q-1)}(t_0) = x_{0,q-1} \,.$$

Nous noterons encore S ((G), t_0, X_0) l'ensemble des solutions de l'équation (G) vérifiant cette condition.

Nous avons pu ramener les équations d'ordre q aux équations d'ordre 1. La relation $\preccurlyeq$ sur les applications étant naturellement analogue à celle introduite au paragraphe 2.1, les théorèmes 1 et 2 se paraphrasent sans difficulté, comme dans le théorème 3.

Théorème 3 (de Cauchy et Lipschitz).
Avec les notations précédentes, supposons g de classe C^1 sur Ω. Il existe alors un unique plus grand élément (I, X) de S ((équation (G)), t_0, X_0). De plus, l'intervalle I est ouvert.
En outre, soit $\boldsymbol{C}$ un compact de Ω. Pour tout $t_1 \in I$:
— il existe $t \geqslant t_1$ tel que $X(t) \notin \boldsymbol{C}$;
— de même, il existe $t' \leqslant t_1$ tel que $X(t') \notin \boldsymbol{C}$.

Cet énoncé est conforme à la situation physique la plus classique ; lorsque l'accélération est fonction de la position et de la vitesse (et éventuellement du temps), et sous réserve que cette dépendance soit assez régulière, la connaissance, à un instant t_0, de la position $x(t_0)$ et de la vitesse $x'(t_0)$ permet de déterminer l'évolution passée et future du système.

2.4 Équations autonomes

Définition 2.

Soient Ω un ouvert de $\boldsymbol{E}$ et f une application de Ω vers $\boldsymbol{E}$. L'équation différentielle :

(E) $$X' = f(X)$$

est dite autonome d'ordre 1.

Nous sommes dans la situation générale évoquée dans le paragraphe 2.1, disposant en outre de l'information supplémentaire que f dépend seulement de X (et non pas du couple (t, X)). Comme on l'a vu dans le paragraphe 1.1, on peut interpréter f comme un champ de vecteurs sur Ω. L'espace $\boldsymbol{E}$ est souvent appelé espace des phases. En fait, f n'est définie que sur une partie de $\boldsymbol{E}$. Il est donc plus légitime de considérer l'ouvert Ω, que l'on appelle la **variété des phases.**

Nous noterons qu'une équation d'ordre q, de la forme :

$$x^{(q)} = g(x, x', \dots, x^{(q-1)}),$$

que l'on appelle équation différentielle autonome d'ordre q, se ramène à la forme précédente par la méthode du paragraphe 1.3, ce qui justifie que, dans la suite, nous étudiions exclusivement l'équation (E).

L'ensemble des résultats énoncés dans le cas général s'applique, avec quelques précisions. Nous nous placerons désormais dans le cas où f est de classe C^1, ce qui permet d'appliquer, en particulier, le théorème 1 de Cauchy et Lipschitz. Tout d'abord, nous noterons la **propriété d'invariance par translation temporelle** suivante.

Proposition 1.

Soient t_0 et λ deux réels. Pour $(I, X) \in S((\text{E}), t_0, X_0)$, posons :

$$\forall u \in I + \lambda \quad X_1(u) = X(u - \lambda).$$

L'application :

$$S((\text{E}), t_0, X_0) \to S(\text{E}), t_0 + \lambda, X_0$$
$$X \mapsto X_1$$

est une bijection.

Preuve. ◇ Soit $(I, X) \in S((\text{E}), t_0, X_0)$. On a :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = f(X(t)).$$

Soit $u \in I + \lambda$, où $I + \lambda$ désigne l'intervalle obtenu à partir de I par translation de λ. Puisque $u = t + \lambda$ avec $t \in I$, on a :

$$X_1'(u) = X'(u - \lambda) = X'(t) = f(X(t)) = f(X(u - \lambda)) = f(X_1(u)).$$

Donc X_1 est solution de l'équation (E).

De plus :

$$X_1(t_0 + \lambda) = X(t_0) = X_0.$$

Donc :

$$X_1 \in S((\text{E}), t_0 + \lambda, X_0).$$

Le caractère bijectif de l'application est alors immédiat. ◇

La proposition 1 a pour conséquence immédiate que les plus grandes solutions (au sens de la relation $\preccurlyeq$) se correspondent elles aussi par translation. Précisément, on a :

$$\phi(t, t_1, X_0) = \phi(t + (t_1 - t_0), t_0, X_0)$$

et $$I(t_1, X_0) = I(t_0, X_0) + (t_1 - t_0)$$

Cette invariance par translation temporelle permet, sans restriction, de fixer arbitrairement un instant initial, que l'on prend, dans toute la suite, égal à 0. En d'autres termes, on ne s'intéressera qu'aux solutions définies en l'instant 0, les autres pouvant être obtenues, si on le désire, par le moyen précédent.

Nous pouvons alors simplifier les **notations.** On notera $I(X_0)$ au lieu de $I(0, X_0)$ et, de même, $\phi(t, X_0)$ au lieu de $\phi(t, 0, X_0)$. Ainsi, $\mathcal{U}$ est l'ensemble des couples $(t, X_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ tels que t appartienne à $I(X_0)$. D'après le théorème 2, $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \boldsymbol{E}$. En outre, si le champ de vecteurs f est de classe C^k, l'application ϕ est de classe C^k.

Définition 3.

L'application ϕ, définie sur l'ouvert $\mathcal{U}$, est appelée flot du champ de vecteurs f (ou de l'équation différentielle $X' = f(X)$).

Pour comprendre cette définition, on peut considérer le champ de vecteurs comme un champ d'impulsions ; une particule occupant à l'instant 0 la position X_0 (dans l'espace des phases) occupera à l'instant t la position $\phi(t, X_0)$. En d'autres termes, soumises à ce champ d'impulsions, les particules de l'espace des phases s'écoulent selon le flot ϕ.

Posons, pour $(t, X_0) \in \mathcal{U}$, $\varphi_t(X_0) = \phi(t, X_0)$. Ainsi, $t \mapsto \varphi_t(X_0)$ est la solution de l'équation (E) qui, à l'instant initial, prend la valeur X_0.

Proposition 2.

On a l'égalité :

$$(\varphi_t \circ \varphi_s)(X_0) = \varphi_{t+s}(X_0)$$

lorsque, d'une part $\varphi_s(X_0)$ et, d'autre part, $\varphi_{t+s}(X_0)$ ou $(\varphi_t \circ \varphi_s)(X_0)$ sont bien définis.

De plus :

$$\varphi_0 = \text{Id}_\Omega.$$

Preuve. ◇ La deuxième égalité résulte de la définition, puisque $\phi(0, X_0)$ est la valeur à l'instant initial de la solution prenant à l'instant initial la valeur X_0.

D'un autre côté, $t \mapsto \varphi_{t+s}(X_0)$ est solution maximale de l'équation (E) sur $I(X_0) - s$ grâce à l'invariance par translation temporelle, et prend la valeur $\varphi_s(X_0)$ à l'instant 0 si $0 \in I(X_0) - s$, c'est-à-dire si $s \in I(X_0)$.

Or $t \mapsto \varphi_t(\varphi_s(X_0))$ est la solution maximale de l'équation (E) qui, à l'instant initial, prend la valeur $\varphi_s(X_0)$.

Ces deux applications ont donc même intervalle de définition, et y coïncident. ◇

Corollaire.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{U}_t$ l'ensemble des X_0 tels que $(t, X_0) \in \mathcal{U}$. L'application φ_t est un difféomorphisme de classe C^{k+1} de $\mathcal{U}_t$ sur $\mathcal{U}_{-t}$.

Preuve. ◇ Puisque $\mathcal{U}$ est ouvert, $\mathcal{U}_t$ est aussi ouvert. De plus, si $X_0 \in \mathcal{U}_t$, $\varphi_t(X_0)$ est bien défini, et $\varphi_{t-t}(X_0) = X_0$ l'est aussi. Donc :

$$\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \text{Id}_{\mathcal{U}_t}.$$

De même :

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \text{Id}_{\mathcal{U}_{-t}}$$

Comme φ_t et φ_{-t} sont de classe C^{k+1}, le résultat en découle. ◇

Définition 4.

Les arcs paramétrés $t \mapsto \phi(t, X_0)$, pour X_0 dans Ω, sont appelés trajectoires du système dynamique. L'image d'une telle trajectoire est appelée orbite du système dynamique.

Soit X_0 un point de Ω. Il existe, d'après le théorème de Cauchy et Lipschitz, une orbite contenant le point X_0, à savoir l'image de $t \mapsto \phi(t, X_0) = X(t)$. Supposons que X_0 appartienne à l'image de $t \mapsto \phi(t, X_1) = Y(t)$. Cela signifie qu'il existe t_1 dans $I(X_1)$ tel que $X(0) = Y(t_1)$. La proposition 1 entraîne alors que $Y(t) = X(t - t_1)$ pour tout t dans $I(X_1)$.

Une première conséquence de cela est que l'image de Y est égale à celle de X, donc que X_0 appartient à une seule orbite, que l'on appellera **l'orbite de X_0**. En particulier, les orbites réalisent une partition de Ω.

En second lieu, l'application X peut être injective sur I, ce qui signifie que l'orbite n'est parcourue qu'une seule fois, ou encore que, pour tout point M de l'image de X, il existe un instant t, et un seul, tel que $X(t) = M$.

Dans le cas où X n'est pas injective, il existe deux instants $t_1 < t_2$ tels que :

$$X(t_1) = X(t_2),$$

et donc, pour tout t dans I, on a :

$$X(t) = X(t + \lambda)$$

avec $\lambda = t_1 - t_2$.

En d'autres termes, X est une application périodique.

Si X n'est pas une application constante, soit T sa plus petite période strictement positive. Ce qui précède montre que, sur $[0, T[$, X est injective, et que $X(0) = X(T)$. La trajectoire est dite **fermée simple**. On notera que l'adjectif « fermé » n'a rien à voir avec celui utilisé en topologie. Dans le contexte présent, il indique simplement que la courbe se referme sur elle-même.

Si X est constante (égale à X_0), on a :

$$X'(t) = 0,$$

donc $f(X_0) = 0$.

Réciproquement, si X_0 est un élément de Ω tel que $f(X_0) = 0$, l'application constante égale à X_0 sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle. Une telle orbite, réduite à un point, est appelée **position d'équilibre**.

Soit X une solution non constante. Puisque les orbites sont disjointes, son image ne peut passer par une position d'équilibre. En particulier, puisque $X'(t) = f(X(t))$, on ne peut avoir $X'(t) = 0$. Ainsi, la trajectoire X est un arc régulier, c'est-à-dire qui admet une tangente en tout point.

Résumons.

Proposition 3.

Soit $X' = f(X)$ une équation autonome, où f est de classe C^k sur Ω. Les orbites réalisent une partition de Ω. Une trajectoire est :

— ou bien une application constante sur $\mathbb{R}$, qui correspond à une orbite réduite à un point, appelée position d'équilibre ;

— ou bien une application périodique sur $\mathbb{R}$, qui correspond à un arc de classe C^{k+1} fermé, régulier, simple, d'image compacte ;

— ou bien une application injective sur l'intervalle ouvert I, qui correspond à un arc de classe C^{k+1} régulier, simple, d'image non compacte.

Preuve. ◇ Il ne nous reste qu'à prouver la non-compacité d'une trajectoire injective.

Supposons par l'absurde que X, solution de l'équation (E), est injective et que $X(I)$ est compact. Montrons d'abord que $I = \mathbb{R}$: si l'on suppose par exemple $b = \sup I < +\infty$, $(t, X(t))$ reste dans $[0, b] \times X(I)$ pour $t \geqslant 0$, ce qui contredit le théorème de Cauchy et Lipschitz.

Comme image d'un compact par l'application continue X, $X([-n, n])$ est un compact, donc un fermé.

Montrons que son complémentaire est dense dans $X(\mathbb{R})$. Pour cela, introduisons l'ensemble A des limites des suites $(X(t_k))$, lorsque (t_k) est une suite quelconque de réels telle que $(|t_k|)$ tende vers $+\infty$. Puisque $X(\mathbb{R})$ est compact, A est inclus dans $X(\mathbb{R})$. En outre, A est non vide : il suffit de considérer n'importe quelle suite de réels $(|u_k|)$ tendant vers $+\infty$, et en extraire, par compacité de $X(\mathbb{R})$, une suite $(|v_k|)$ telle que $(X(v_k))$ tende vers α. Mais, quel que soit t :

$$\varphi_{t+v_k}(X(0)) = \varphi_t(\varphi_{v_k}(X(0))).$$

Puisque $\varphi_{v_k}(X(0)) = X(v_k) \to \alpha$, la continuité de φ_t entraîne que :

$$\varphi_{t+v_k}(X(0)) \to \varphi_t(\alpha).$$

Par conséquent, $\varphi_t(\alpha)$ appartient à A. Il en résulte que A contient tous les éléments de l'orbite de α et donc contient $X(\mathbb{R})$.

Soit alors β un élément de $X(\mathbb{R})$; il est dans A. En particulier, pour tout n, il existe une suite $(|t_k|)$ de réels tous de valeur absolue plus grande que n, telle que $X(t_k) \to \beta$. Cela entraîne que $X(\mathbb{R} - [-n, n])$ est dense dans $X(\mathbb{R})$. Comme X est injective, $X(\mathbb{R} - [-n, n])$ n'est autre que le complémentaire, dans $X(\mathbb{R})$, de $X([-n, n])$. Par conséquent, $X(\mathbb{R} - [-n, n])$ est un ouvert dense dans le compact $X(\mathbb{R})$. Le théorème de Baire entraîne alors que l'intersection de tous ces ouverts (lorsque n décrit $\mathbb{N}$) contient au moins un point, de la forme $X(t)$, mais aussi de la forme $X(t')$ pour un t' tel que $|t'| > n > |t|$. Cela contredit l'injectivité de X. ◇

2.5 Retour sur le cas non autonome

Considérons à nouveau une équation non autonome :

(F) $$x' = f(t, x).$$

Posons $X(t) = (t, x(t))$. Il est facile de constater que X est solution de l'équation autonome :

(E) $$X' = g(X)$$

avec $g(x_1, x_2) = (1, f(x_1, x_2))$.

Cependant, la réciproque n'est pas vraie, puisque, si $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ satisfait l'équation (F), la primitivation de $x_1' = 1$ fournit seulement :

$$x_1(u) = u + c.$$

Si on se penche sur le problème de Cauchy :

$$x' = f(t, x) \ ; \ x(0) = x_0,$$

on obtient la condition supplémentaire :

$$X(0) = (0, x(0)), \text{ c'est-à-dire } x_1(0) = 0 \text{ et } x_2(0) = x_0,$$

qui rend cette fois équivalents les deux problèmes. Ainsi, étudier une équation non autonome avec une condition initiale $(0, x_0)$ revient à étudier le flot d'une équation autonome limité à des valeurs de X_0 de première composante nulle. Malheureusement, dès que la condition initiale est du type $x(t_0) = x_0$, avec t_0 non nul, on ne peut en général se contenter d'étudier le flot du système autonome précédent, puisqu'il n'est nullement certain que (t_0, x_0) soit dans $\mathcal{U}$. On gardera donc à l'esprit qu'une équation non autonome peut se ramener à une équation autonome, assortie des conditions

initiales *ad hoc*, mais que la théorie des systèmes dynamiques, et notamment l'utilisation du flot, ne s'applique pas sans restriction.

Exemple : soit (F) l'équation scalaire $x' = 2x^2t$, choisie parce que l'on peut en expliciter les solutions. Elle est à variables séparables. Sa résolution conduit aux différentes solutions suivantes :

$I = \mathbb{R}, x(t) = 0$;

$I = \mathbb{R}, x(t) = -\frac{1}{t^2 + a^2}, a > 0$;

$I =]-\infty, -a[, x(t) = -\frac{1}{t^2 - a^2}, a > 0$;

$I =]-a, a[, x(t) = -\frac{1}{t^2 - a^2}, a > 0$;

$I =]a, +\infty[, x(t) = -\frac{1}{t^2 - a^2}, a > 0$.

Les trajectoires correspondant à ces équations non autonomes sont tracées sur la figure **5**.

D'un autre côté, si l'on étudie le flot, on constate que, dans l'espace des phases, on n'obtient comme solutions définies en 0 que celles dont le graphe est tracé en gras (non tireté).

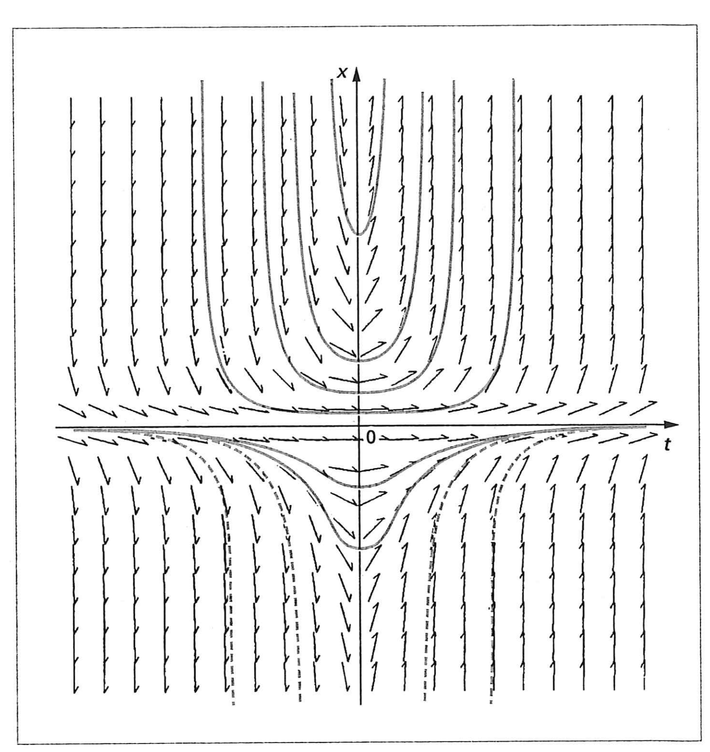


Figure 5 – Flot d'une équation non autonome

3. L'exemple du pendule simple

Nous allons dans ce paragraphe introduire un système, approximant un système physique élémentaire. Après avoir modélisé ce système, nous constaterons que son évolution obéit à une équation différentielle autonome d'ordre 2, c'est-à-dire à un système différentiel autonome de taille 2. Nous étudierons alors les solutions, dans le but à la fois d'utiliser les outils introduits dans le paragraphe 2, de tracer le portrait de phase et d'illustrer le langage propre aux systèmes autonomes. Nous démontrerons aussi, volontairement, des résultats qui, dans ce cas, pourraient paraître évidents (qui n'a pas assisté à cette expérience, au moins virtuellement ?), principalement pour pouvoir les appliquer plus tard dans des contextes où le but de la théorie serait de prévoir, et non pas de confirmer, des résultats physiques.

3.1 Le problème physique et sa loi d'évolution

On considère une tige rigide de longueur ℓ, à l'extrémité E de laquelle est fixée une masse m. L'autre extrémité du pendule peut tourner autour d'un point fixe F ; la masse de la tige est supposée nulle. Le pendule est placé dans un champ gravitationnel constant de l'espace affine euclidien de dimension 3. Constant signifie ici indépendant de la position et de l'instant. On supposera, pour conserver une situation traditionnelle, que le champ est d'intensité g, de sorte que l'accélération subie par une masse m est $mg\vec{i}$, où $\vec{i}$ est unitaire. On complète ce vecteur en une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Nous supposerons en outre (c'est une restriction importante au cas général) que le pendule se déplace dans le plan de repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$ plan vertical contenant F. Le point F se déplace alors sur un cercle. Dans ce plan orienté, on introduit un angle polaire θ, comme sur la figure **6**.

A ce sujet, il faut constater que la position de E n'est pas bijectivement liée à la valeur de θ, définie à un multiple entier de 2π près. Ce faisant, nous avons fait une hypothèse implicite sur la variété des phases, en paramétrant le cercle par θ. Nous n'étudierons pas ici la validité de cette hypothèse. Disons simplement que, de cette façon, nous pourrons nous placer dans le cadre de cet article.

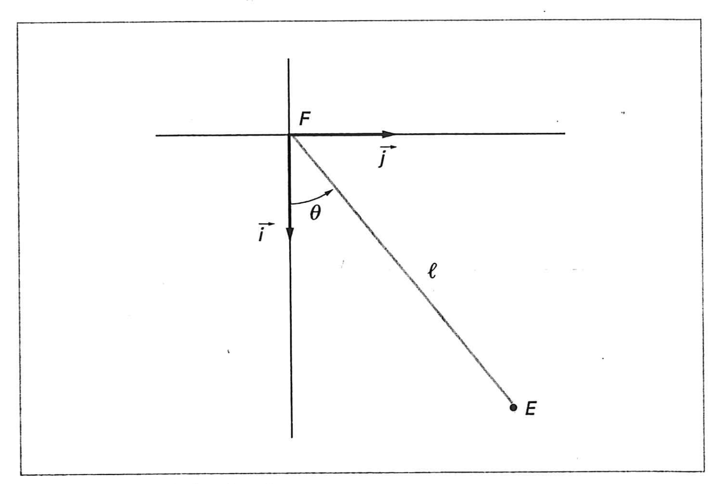


Figure 6 – Pendule simple

L'accélération tangentielle à laquelle est soumis le point E est égale à :

$$\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u_\theta}$$

On obtient donc :

$$\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin\theta$$

Ainsi :

(F) $\theta'' = -a \sin\theta,$

avec $a = -\dfrac{g}{\ell}$.

Cette équation différentielle autonome et scalaire d'ordre 2 régit l'évolution du système.

Posons :

$$\psi(t) = \theta\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right).$$

On obtient :

$$\psi''(t) = \frac{1}{a}\theta''\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right) = -\sin\left(\theta\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)\right) = -\sin(\psi(t)).$$

Ainsi, nous avons pu nous ramener au cas où $a = 1$, par un changement de variable temporelle qui, ici, correspond à prendre simplement une autre unité de temps. Ce procédé, de **normalisation**, est couramment utilisé pour alléger la présence des paramètres. En revanche, lorsque nous voudrons étudier des systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre, nous ne pourrons recourir à cet expédient qu'avec parcimonie, puisque le changement de variable dépend justement du paramètre.

Nous étudions à présent l'équation différentielle :

(F) $\theta'' = -\sin\theta.$

3.2 Utilisation d'une intégrale première

L'équation (F) équivaut au système :

$$(\theta, \theta')' = f(\theta, \theta')$$

avec $f(x_1, x_2) = (x_2, -\sin x_1)$.

L'espace des phases est, ici, $\mathbb{R}^2$, que l'on appellera, pour d'évidentes raisons, l'espace des (θ, θ'). A l'occasion, on désigne même par (θ, θ') un élément de $\mathbb{R}^2$.

3.2.1 Premières remarques

■ **Étude de I**

Soit θ une solution maximale, sur I, de l'équation (F). Supposons, par l'absurde, que I admet la borne supérieure réelle a. Puisque $\theta'' = -\sin\theta$, θ'' est bornée sur I, donc a une intégrale convergente en b^-. Cela implique que θ' admet une limite en b^- puis, par un argument analogue, que θ admet une limite en b^-. Cela entraîne que θ est bornée sur $[0, b[$, donc que le graphe de θ reste dans un compact pour $t \geqslant 0$, ce qui est une contradiction.

Ainsi, I n'est ni majoré ni, par un argument identique, minoré. Donc :

$$I = \mathbb{R}.$$

■ **Recherche des positions d'équilibre.**

Les positions d'équilibre sont les solutions de l'équation :

$$(x_2, -\sin x_1) = (0, 0).$$

On obtient les positions $(k\pi, 0)$ (pour $k \in \mathbb{Z}$). Physiquement, la tige du pendule est alors en position verticale (vers le bas, si k est pair, vers le haut sinon), et le point E a une vitesse nulle.

Dans le paragraphe 3.2.2, on s'intéresse aux trajectoires non constantes.

3.2.2 Obtention d'une intégrale première

Multiplions par $2\theta'$ l'égalité :

$$\theta'' + \sin\theta = 0$$

et primitivons l'égalité ainsi obtenue. Il vient :

(G) $\theta'^2 - 2\cos\theta = c.$

On dit que l'on a obtenu une **intégrale première du système**. Ici, l'intégrale première est l'application ε définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varepsilon(x_1, x_2) = x_2^2 - 2\cos x_1.$$

De façon générale, on appelle intégrale première d'une équation différentielle autonome toute application, de classe C^1 sur Ω, constante sur chaque orbite.

Des intégrales premières sont dites *indépendantes* lorsque, pour tout X_0 dans Ω, les applications linéaires tangentes en X_0 sont indépendantes (ou de manière équivalente, dans le cas d'une structure euclidienne, lorsque les gradients sont indépendants). Dans le cas d'une seule intégrale première, cela signifie que l'application linéaire tangente n'est jamais l'application nulle, ce qui exclut en particulier les applications constantes.

Couramment, « famille d'intégrales premières » est souvent utilisé pour un raccourci de « famille d'intégrales premières indépendantes ». Par exemple, puisque :

$$\text{grad}\,\varepsilon = (2\sin x_1, 2x_2),$$

le gradient ne s'annule qu'en les positions d'équilibre ; ε est en fait une intégrale première « indépendante » sur $\mathbb{R}^2$ privé des positions d'équilibre.

Nous savons qu'une orbite est incluse dans un ensemble :

$$\varepsilon(x_1, x_2) = c,$$

courbe de niveau de l'application ε.

Soit réciproquement :

$$t \mapsto (x_1(t), x_1'(t))$$

un arc de classe C^1, régulier, dont l'image est incluse dans un tel ensemble. Par dérivation, on obtient :

$$x_1'(t)(x_1''(t) + \sin x_1(t)) = 0.$$

Les points t en lesquels x_1' s'annule forment un ensemble d'intérieur vide, faute de quoi x_1 serait constante sur un intervalle, et l'arc ne serait pas régulier. L'égalité :

$$x_1''(t) + \sin x_1(t) = 0,$$

vraie sur un ensemble dense, est donc vraie partout, et x_1 est solution (peut-être pas maximale) de l'équation différentielle.

Pratiquement, cette intégrale première va être utilisée pour tracer les ensembles :

$$\varepsilon(x_1, x_2) = c.$$

Il est souvent difficile d'exploiter ces ensembles de façon rigoureuse, puisqu'il faut savoir s'ils peuvent être paramétrés comme ci-dessus. Néanmoins, ils donnent des indications précieuses sur le portrait de phase, permettent de le visualiser lorsqu'on en a démontré les propriétés, et de retrouver des propriétés (mathématiques, expérimentales ou intuitives) que l'on en connaît déjà.

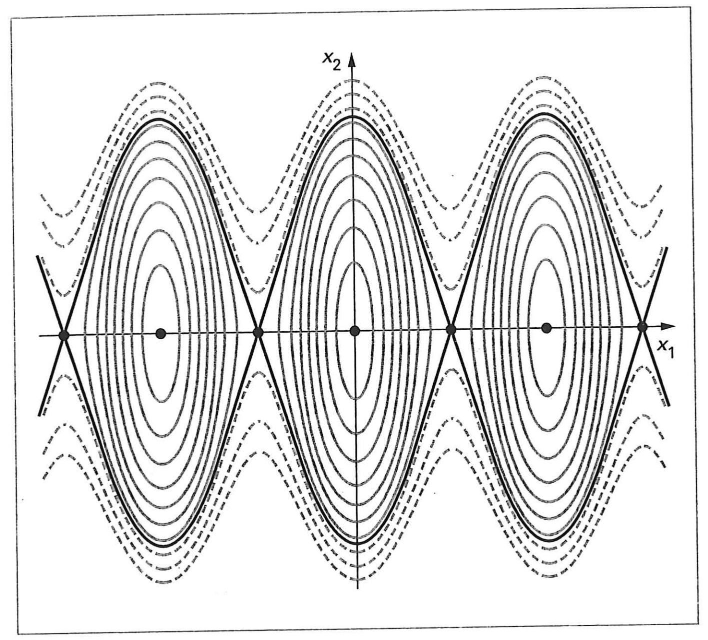


Figure 7 – Courbes de niveau

La figure **7** donne les courbes de niveau de l'application ε. Les positions d'équilibre sont indiquées par un petit rond, les courbes fermées sont en trait gras cyan et les courbes non compactes en tireté cyan.

On observe tout d'abord que les courbes fermées pourraient correspondre à des orbites fermées, donc à des solutions périodiques. Les courbes en tireté laissent penser qu'elles sont associées à des trajectoires non périodiques, mais qui le deviennent lorsque l'on identifie x_1 et $x_1 + 2\pi$.

Enfin, les deux courbes en gras noir ne peuvent correspondre qu'à une infinité d'orbites, puisqu'une orbite ne contient pas de position d'équilibre.

3.3 Étude avec conditions initiales particulières

L'étude précédente (§ 3.2.2) suggère que chaque orbite coupe une droite $x_1 = 2k\pi$. Plutôt que de le montrer maintenant, nous allons tout d'abord nous limiter à l'étude des solutions θ telles que : $\theta(0) = 0$.

Nous montrerons plus tard qu'imposer cela n'est pas restrictif. Nous poserons aussi :

$$\theta'(0) = v.$$

On constate aisément que, si θ est solution de l'équation (F), $t \mapsto \theta(-t)$ l'est aussi.

On peut donc se restreindre à $v > 0$. L'équation (G) devient :

$$\theta'^2 = 2\cos\theta + v^2 - 2,$$

soit :

$$\text{(H)} \qquad \theta'^2 = v^2 - 4\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

La position de v par rapport à 2 joue un rôle évidemment important, que nous mettrons en évidence.

■ **Cas $v > 2$.**

On constate qu'alors θ' ne s'annule pas, donc que θ' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, nécessairement égal au signe de v, c'est-à-dire positif. Notons g la primitive de :

$$u \mapsto \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4\sin^2\frac{u}{2}}}$$

qui s'annule en 0, c'est-à-dire :

$$g(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{v^2 - 4\sin^2\frac{u}{2}}}$$

L'équation (H) devient :

$$g'(\theta(t))\theta'(t) = 1$$

soit $g(\theta(t)) = t + d$, avec $d = 0$ grâce aux conditions initiales.

Finalement, si h désigne la réciproque de l'application strictement monotone g :

$$\theta(t) = h(t).$$

On a pu ainsi expliciter la solution θ, comme application réciproque d'une certaine primitive. A l'aide des fonctions de Jacobi, on obtient :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Am}\left(\frac{v}{2}t, \frac{2}{v}\right).$$

Posons :

$$T = g(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{v^2 - 4\sin^2\frac{u}{2}}}.$$

On a clairement :

$$g(u + 2\pi) = g(u) + T,$$

et donc :

$$h(t + T) = h(t) + 2\pi.$$

Ainsi, entre les temps t et $t + T$, le pendule a effectué une rotation complète, et se trouve en ces deux instants avec une position (dans le plan) et une vitesse égales. On notera que cette « T-périodicité à 2π près » correspond à une vraie périodicité sur le cercle.

■ **Cas $v < 2$.**

Notons toujours g la primitive de :

$$u \mapsto \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4\sin^2\frac{u}{2}}}$$

qui s'annule en 0 ; remarquons que g est impaire. D'autre part, g n'est définie que sur l'intervalle $[-u_0, u_0]$, avec :

$$u_0 = 2\,\mathrm{Arc}\sin\frac{v}{2},$$

et h, sa fonction réciproque, est définie sur $[-t_0, t_0]$ où :

$$t_0 = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{v^2 - 4\sin^2\frac{u}{2}}}$$

Sur $[-t_0, t_0]$, on voit, comme dans le cas précédent, que $\theta = h$.

Montrons à présent que θ est $2t_0$-antipériodique. Puisque $\theta'(t_0) = 0$, l'application :

$$t \mapsto -\theta(t + 2t_0),$$

qui vérifie encore l'équation différentielle (F), vaut en $-t_0$:

$$-\theta(t_0) = \theta(-t_0) \;;$$

sa dérivée vaut en $-t_0$:

$$-\theta'(t_0) = 0 = \theta'(-t_0) .$$

Par conséquent, pour tout t, on a :

$$\theta(t) = -\theta(t+2t_0) .$$

Il résulte de cela que θ est $4t_0$-périodique.

Cas $v = 2$.

Ce cas est particulier, car on peut expliciter la solution à l'aide des fonctions élémentaires. On obtient :

$$\theta'^2 = 4\cos^2\frac{\theta}{2} .$$

Dans ces conditions, θ' ne peut s'annuler que si $\theta = k\pi$, ce qui correspond à une position d'équilibre, exclue. Donc θ' garde un signe constant, nécessairement positif. De même, $\cos\frac{\theta}{2}$ garde un signe positif. Ainsi, l'équation devient :

$$\theta' = 2\cos\frac{\theta}{2} ,$$

à variables séparables, qui s'intègre sous la forme :

$$\theta(t) = 4\,\mathrm{Arctan}\frac{e^{t/2}-1}{e^{t/2}+1} ,$$

les conditions initiales ayant été utilisées. On constate aisément que θ varie entre $-\pi$ et π.

3.4 Étude générale

Justifions à présent que le choix de conditions initiales particulières n'est pas restrictif. Montrons pour cela que toute solution θ différente d'un équilibre prend au moins une fois une valeur de la forme $2k\pi$.

Dans le cas contraire, elle prend ses valeurs dans un certain intervalle $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$. Quitte à considérer l'application $\theta - 2k\pi$, encore solution de l'équation (F), on peut supposer que θ est à valeurs dans $]0, 2\pi[$.

Premier cas. θ' s'annule deux fois au moins dans $\mathbb{R}$.

Si $\theta'^2(t_1) = \theta'^2(t_2) = 0$, l'application θ'^2 atteint sur $[t_1, t_2]$ un maximum, en lequel elle ne peut être nulle (sinon θ serait constante sur $[t_1, t_2]$, et serait donc un équilibre). A cet instant, $2\theta'\theta''$ s'annule, donc θ'', puis $\sin\theta$, sont nuls.

Mais si $\theta = \pi$:

$$\cos\theta = -1.$$

Or, θ'^2 atteignant à cet instant un maximum, $\cos\theta$ en atteint un aussi d'après l'équation (G). Cela entraîne à nouveau que θ est un équilibre. Il y a contradiction.

Deuxième cas. θ' ne s'annule pas dans $\mathbb{R}$.

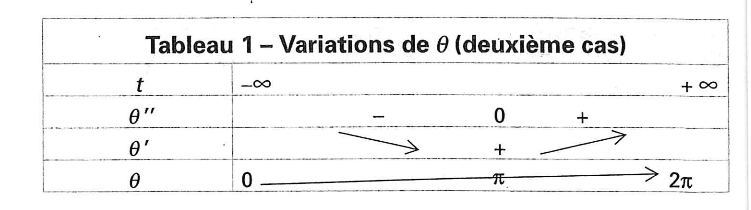
Remarquons déjà que $\theta'' = -\sin\theta$ change de signe et s'annule, car une fonction convexe (ou concave) bornée sur $\mathbb{R}$ est nécessairement constante. En un point d'annulation de $\sin\theta$, θ prend la valeur π.

Quitte à changer θ en $-\theta$, on peut supposer que θ croît strictement. Étant bornée, θ admet des limites ℓ et ℓ' en $-\infty$ et $+\infty$. Il en résulte que θ'' admet les limites $-\sin\ell$ et $-\sin\ell'$, nécessairement nulles (sinon $|\theta|$ tend vers $+\infty$). Donc :

$$\ell = 0 \text{ et } \ell' = 2\pi .$$

Mais θ'^2 tend aussi vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$, ce qui est une contradiction manifeste avec le tableau de variations de θ (tableau **1**).

Tableau 1 – Variations de θ (deuxième cas)



t	$-\infty$				$+\infty$
θ''		$-$	0	$+$	
θ'		↘	$+$	↗	
θ	0	↗	π	↗	2π

Troisième cas. θ' s'annule une fois dans $\mathbb{R}$.

Quitte à changer θ en $-\theta$, on peut supposer que θ décroît, puis croît. Puisque, comme dans le second cas, θ admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$, ces limites sont l'un des nombres 0, π ou 2π.

Puisque θ prend la valeur π, les limites de θ en $-\infty$ et $+\infty$ sont toutes deux égales à 2π. Il en résulte que $\theta'' = -\sin\theta > 0$ au voisinage de $-\infty$, donc que θ' croît au voisinage de $-\infty$. Comme $\theta' \to 0$ en $-\infty$, θ croît au voisinage de $-\infty$, ce qui est une contradiction.

Finalement, nous obtenons le résultat voulu : toute orbite coupe une droite $\theta = 2k\pi$. En utilisant le fait que, si θ est solution de l'équation (F), $\theta - 2k\pi$ est aussi solution de l'équation (F), on a bien pu ramener l'étude des orbites aux conditions particulières choisies.

3.5 Interprétation

Nous avons montré que le phénomène étudié est défini à tout instant (§ 3.2.1). Lorsque la tige est en position verticale avec une vitesse nulle, elle y reste (§ 3.2.1). La fonction ε (§ 3.2.2), qui est une intégrale première, peut être interprétée comme l'énergie du système qui, dans notre cas, est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. Nous avons montré qu'il existe toujours un moment où la tige passe en position verticale, vers le bas, sauf dans le cas où elle reste dans la position verticale vers le haut (§ 3.4). Ce faisant, nous nous sommes ramenés au cas où l'énergie potentielle est nulle, et nous avons discuté sur l'énergie cinétique du système à cet instant. Lorsque l'énergie cinétique est suffisamment grande, le pendule effectue une infinité de tours, dans un mouvement périodique à 2π près. Lorsque cette énergie cinétique diminue pour atteindre une valeur discriminante ($v = 2$), le pendule effectue un seul tour presque complet (en un temps infini). Lorsqu'elle diminue encore, le pendule oscille périodiquement, avec une amplitude qui diminue elle aussi (§ 3). Nous observons une situation peut-être étonnante : la position d'équilibre vers le bas, qui correspond à une énergie totale nulle, n'est pas asymptotiquement stable au sens où, même lorsque l'énergie du système est faible, la trajectoire du pendule ne tend pas vers cette position pour de grandes valeurs de t. En revanche, pour $v = 2$, la position du pendule tend vers la position d'équilibre correspondant à une énergie totale égale à 4 !

4. La notion de système dynamique

4.1 Le cas « continu »

Soit une équation autonome :

(E) $$X' = f(X)$$

où f est de classe C^k sur un ouvert Ω de E. Nous disposons d'une application ϕ, le flot, de classe C^k sur un certain ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}\times\Omega$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\phi(t, \phi(s, X_0)) = \phi(t+s, X_0) \ ;$$
$$\phi(0, X_0) = X_0$$

chaque fois que le premier membre de chacune des égalités est défini.

Nous pouvons légitimement définir de façon générale un système dynamique à l'aide de ce cas particulier.

Définition 5.

On appelle **système dynamique « continu »** de classe C^k la donnée d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}\times\boldsymbol{E}$ et d'une application ϕ, de classe C^k sur $\mathcal{U}$, et de classe C^{k+1} par rapport à la première variable, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\phi(t, \phi(s, X_0)) = \phi(t+s, X_0) \ ;$$
$$\phi(0, X_0) = X_0$$

chaque fois que le premier membre de chacune des égalités est défini. L'application ϕ est appelée flot du système dynamique.

L'adjectif « continu » mérite une explication. La notion de système dynamique que nous venons d'introduire a trait à un flot défini sur un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie ; c'est à cette notion de continu (par opposition à « discret », cf. § 4.2) que notre terminologie fait allusion. En réalité, le contexte rendra suffisamment claire la situation dans laquelle nous nous trouverons, nous permettant ainsi de faire l'économie du qualificatif. Nous noterons que, dans un cadre topologique très général, les notions de « continu » et de « discret » se confondraient. Nous savons que l'équation différentielle autonome (E) donne lieu à un système dynamique. **Réciproquement**, soit un système dynamique de flot ϕ. Montrons qu'il est associé à une équation différentielle autonome dont le flot est justement ϕ.

Raisonnons d'abord par condition nécessaire, en supposant qu'il existe f, de classe C^k sur un ouvert Ω, dont le flot est ϕ. Nécessairement, l'ouvert Ω est manifestement égal à l'ensemble des X_0 tels que $(0, X_0)$ appartienne à $\mathcal{U}$. Soit (I, X) la plus grande solution au problème de Cauchy de condition initiale X_0. On a :

$$X(t) = \phi(t, X_0),$$

et I est manifestement inclus dans l'ensemble des t tels que (t, X_0) appartienne à $\mathcal{U}$. De plus :

$$X'(t) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t, X_0),$$

et l'égalité :

$$X'(0) = f(X(0))$$

entraîne :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(0, X_0) = f(X_0).$$

On voit ainsi que f est nécessairement définie par cette égalité. Il y a donc au plus un champ de vecteurs f qui convienne.

Montrons que f convient effectivement. Posons pour cela :

$$f(X_0) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(0, X_0) \ ;$$

cette application est de classe C^k sur l'ouvert Ω formé des X_0 tels que $(0, X_0)$ appartienne à $\mathcal{U}$. Considérons l'équation (E) : $X' = f(X)$. Soit X_0 dans $\boldsymbol{E}$. Posons, pour (t, X_0) dans $\mathcal{U}$:

$$X(t) = \phi(t, X_0).$$

On a : $X(0) = X_0$.

De plus :

$$X'(t) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t, X_0).$$

Or, si (s, X_0) est dans $\mathcal{U}$, en dérivant la relation :

$$\phi(t, \phi(s, X_0)) = \phi(t+s, X_0)$$

par rapport à t pour t assez proche de 0, ce que permet le caractère ouvert de $\mathcal{U}$, on obtient :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t, \phi(s, X_0)) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t+s, X_0).$$

Évaluée en $t = 0$, cette égalité fournit :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(0, \phi(s, X_0)) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(s, X_0),$$

soit :

(E) $$f(X(s)) = X'(s).$$

Ainsi, X est solution du problème de Cauchy ; compte tenu de son domaine de définition, elle est clairement maximale ; par conséquent le flot de l'équation (E) est bien égal à ϕ.

En **résumé**, il y a bijection entre les systèmes dynamiques continus et les équations autonomes. Il est facile de déterminer le champ de vecteurs lorsque le flot est connu. En revanche, la détermination du flot à l'aide du seul champ de vecteurs pose des problèmes autrement redoutables : c'est à ces problèmes qu'est consacrée l'étude des systèmes dynamiques, étant entendu que « détermination » ne signifie pas « détermination exacte » ni même, dans beaucoup de cas, « détermination approchée », mais, le plus souvent, « étude qualitative ».

4.2 Le cas « discret »

Nous calquerons la définition d'un système dynamique discret sur celle d'un système dynamique continu (§ 4.1). Pour cela, nous remplaçons la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$, qui correspond à un intervalle de temps continu, par ce qui peut tenir lieu d'intervalle de temps discret. La plus simple (mais en aucun cas la seule) des possibilités offertes est de prendre l'ensemble des entiers naturels. Nous sommes donc conduits à introduire la définition suivante.

Définition 6.

Soit U un espace topologique. On appelle **système dynamique « discret »** la donnée d'une application ϕ de $\mathbb{N}\times U$ vers U, continue par rapport à la seconde variable, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\phi(t, \phi(s, u_0)) = \phi(t+s, u_0),$$
$$\phi(0, u_0) = u_0$$

pour tout t et s dans $\mathbb{N}$, et pour tout u_0 dans U. L'application ϕ est appelée flot du système dynamique.

Posons :

$$f(u_0) = \phi(1, u_0).$$

Une récurrence immédiate montre que :

$$\phi(n, u_0) = f^n(u_0),$$

où $f^n = f \circ \ldots \circ f$ est l'itérée n fois de f pour la composition.

Ainsi, le flot du système dynamique peut être obtenu par itération d'une certaine application continue de U vers U.

Si **réciproquement** f est une application continue de U vers U, on constate que l'on définit un système dynamique discret sur U en posant :

$$\phi(n, u_0) = f^n(u_0).$$

En d'autres termes, l'étude des systèmes dynamiques discrets équivaut à l'étude de l'itération des applications.

Une autre façon de présenter les choses est de poser :

$$u(n) = f^n(u_0),$$

définissant ainsi une suite d'éléments de U. On aura alors la relation :

(E) $$u(n+1) = f(u(n)).$$

La suite u satisfait donc une relation de récurrence d'ordre 1, dite **autonome** par opposition à la relation plus générale de la forme $u(n+1) = g(n, u(n))$. On peut bien évidemment, et comme dans le cas continu, ramener l'étude des suites récurrentes les plus générales, d'ordre arbitraire, et éventuellement non autonomes, à celles des suites précédentes. Nous étudierons désormais l'équation (E), lorsque f est une application de U vers U.

L'analogue du théorème de Cauchy et Lipschitz dans le cas de l'équation (E) est le suivant. Soit u_0 un élément de U. Il existe une unique suite u solution de l'équation (E) et telle que $u(0) = u_0$. La démonstration de ce résultat découle d'une simple récurrence.

Nous pouvons à présent, par analogie avec le cas continu, établir les principales notions relatives aux systèmes dynamiques discrets. On appelle orbite de u_0 l'image de la suite u (elle-même appelée trajectoire de u_0), c'est-à-dire l'ensemble $\{u(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Cet ensemble est fini ou dénombrable. Lorsque cette orbite est réduite à un point α, ce qui signifie que la suite u est constante, ce point vérifie $f(\alpha) = \alpha$. On dit que c'est un **point fixe** de f. Cette valeur sera aussi appelée position d'équilibre.

Si une orbite est finie, il existe $p < q$ tel que :

$$u(p) = u(q) = f^{p-q}(u(p)).$$

Autrement dit, $u(p)$ est un point fixe de f^{p-q}, et il en résulte que la suite $(u(n))_{n \geqslant p}$ admet la période $p - q$. On dit que la suite u est ultimement périodique, ou encore périodique à partir d'un certain indice. Les valeurs m qui sont une ultime période de u constituent un ensemble $T\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$, et T est appelé plus petite ultime période de la suite u. La réciproque étant vraie, on voit donc que les trajectoires sont ou bien injectives, ou bien ultimement périodiques.

On pourrait être surpris de ce que l'analogie avec le cas continu ne soit pas suffisante pour obtenir, dans le cas d'une orbite finie, une suite vraiment périodique. La raison est liée à la forme de l'intervalle de temps considéré, qui est $\mathbb{N}$. Si nous remplaçons $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$, f est alors bijective ; les trajectoires finies correspondent bien dans ce cas à des trajectoires périodiques. On voit donc apparaître des situations particulières liées au type de système dynamique considéré. En revenant au cas d'un système dynamique d'intervalle temporel égal à $\mathbb{N}$, on remarquera par exemple que deux orbites distinctes ne sont pas nécessairement disjointes : on peut seulement affirmer que si deux orbites se coupent, leur intersection est encore une orbite.

Une notion importante est celle d'ensemble **stable par le flot**. Dans le cas discret, un sous-ensemble V de U est dit stable par le flot lorsque, pour tout n, et pour tout u_0 dans V, $\phi(n, u_0)$ appartient à V. Cela revient à dire que, pour tout n :

$$f^n(V) \subset V,$$

ce qui équivaut encore à $f(V) \subset V$.

Cette notion peut d'ailleurs s'appliquer aux systèmes continus. Mais, dans ce cas, l'on ne peut en général pas la reformuler à l'aide du seul champ de vecteurs. Il est néanmoins facile de voir, dans les deux cas, qu'un ensemble est stable par le flot si, et seulement si, c'est une réunion d'orbites.

5. Quelques exemples de systèmes dynamiques simples

5.1 Systèmes dynamiques continus dans $\mathbb{R}$

5.1.1 Étude générale

Nous considérons ici une équation autonome :

(E) $$x' = f(x),$$

où f est une application de classe C^1 d'un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, vers $\mathbb{R}$. On notera que le caractère ouvert de J n'est pas essentiel dans la suite ; nous ferons cette hypothèse pour nous situer pleinement dans les conditions de la définition 2.

Nous appelons Z l'ensemble des positions d'équilibre, c'est-à-dire l'ensemble des α de J tels que $f(\alpha) = 0$. Nous limitons notre étude aux trajectoires non constantes.

Soit (I, X) une telle trajectoire. Puisque $I \subset J - Z$, I est inclus dans une composante connexe I' de $J - Z$. Sur I', f ne s'annule pas. Soit F la primitive de $\frac{1}{f}$ sur I' qui s'annule en $x(0)$. L'équation (E) s'écrit :

$$F'(x(t))x'(t) = 1 \quad ,$$

soit $F(x(t)) = t$.

Donc :

$$x(t) = F^{-1}(t) \text{ sur } I.$$

Soit x_0 dans I'. L'application F, définie par :

$$F(u) = \int_{x_0}^{u} \frac{\mathrm{d}v}{f(v)},$$

est strictement monotone sur I', et a pour image l'intervalle $F(I')$. Son application réciproque F^{-1} est donc une application strictement monotone sur $F(I')$, de classe C^2 sur cet intervalle.

Si l'on pose $x(t) = F^{-1}(t)$ pour t dans I', on obtient donc sur I' une solution de (E), telle que :

$$x(0) = x_0,$$

qui est la plus grande solution de ce problème de Cauchy.

Nous avons ainsi déterminé le flot, à l'aide des inverses des primitives de $\frac{1}{f}$ sur les intervalles où elles sont définies. Nous en déduisons facilement les orbites. Puisque l'image de $F(I')$ par F^{-1} est I', on voit que l'orbite d'un élément de I' est I'. Par conséquent, les orbites sont, outre les singletons correspondant aux points d'annulation de f, les plus grands intervalles sur lesquels f ne s'annule pas. Nous n'oublierons pas, bien sûr, que la variété des phases est ici l'intervalle J, sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Dans le cas présent, on remarquera que toutes les trajectoires non constantes sont strictement monotones, donc injectives. Cette situation très particulière montre que les systèmes dynamiques continus de taille 1 ne peuvent guère constituer une source de modélisation riche.

5.1.2 Un modèle biologique

Pour modéliser l'évolution d'une population x, Malthus propose, en 1798, la loi d'évolution :

$$x' = rx,$$

qui conduit à une extinction exponentielle si $r < 0$, ou à une surpopulation exponentielle si $r > 0$.

Le caractère non réaliste d'un tel modèle conduit Verhulst à proposer, en 1836, une autre loi d'évolution. Pour cela, il part, comme Malthus, de l'existence d'un facteur r, différence entre taux de natalité et taux de mortalité, qu'il suppose positif. Pour éviter l'inflation démographique, il suggère que la loi d'évolution contient un facteur de rappel, d'autant plus fort que x est grand. Il est ainsi conduit à proposer l'équation différentielle scalaire :

(F) $$x' = rx\left(1-\frac{x}{k}\right) = f(x)$$

où f est appelée **fonction logistique.**

Les réels positifs k et r sont des **paramètres.** Ces paramètres peuvent être éliminés par normalisation. Posant $y(t) = kx\left(\frac{t}{r}\right)$, on voit que :

$$y'(t) = y(t)(1-y(t)).$$

Ainsi, on peut supposer $k = r = 1$.

L'équation devient :

(E) $$x' = x(1-x).$$

Les équilibres sont $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 1$. Les trajectoires non constantes sont aisées à expliciter :

$$x(t) = \frac{ce^t}{1+ce^t}.$$

Lorsque $x(0) > 0$, on obtient le portrait de phase de la figure **8**.

On constate que, lorsque $t \to +\infty$, toutes les trajectoires non constantes tendent vers α_2, qui, pour cette raison, est appelé **équilibre asymptotiquement stable.** En effet, si la valeur x_0 est légèrement écartée de la valeur α_2, la trajectoire obtenue, qui ne sera plus constante, tendra vers la position d'équilibre α_2. De fait, « légèrement » est ici de trop car **toute** trajectoire tend vers α_2. On exprime cela en disant que le **bassin d'attraction** de α_2 est égal à $\mathbb{R} - \{\alpha_1\}$.

Quant à α_1, il n'est limite d'aucune trajectoire autre que l'équilibre α_1 : on dit qu'il s'agit d'un **équilibre asymptotiquement instable.**

On dispose, dans le cas des équations scalaires, de la possibilité supplémentaire de visualiser aisément, non seulement les orbites, c'est-à-dire le portrait de phase, mais aussi les trajectoires, en représentant le graphe de l'application x. Les équilibres apparaissent comme les droites horizontales. La stabilité asymptotique de 1 et l'instabilité asymptotique de 0 sont éminemment lisibles sur la figure **9**.

Enfin, traçons le graphe de f, lorsque (figure **10**) :

$$f(x) = x(1-x).$$

Les équilibres sont donnés par l'intersection avec l'axe des x. On constate que :

$$f'(\alpha_1) > 0 \quad \text{et} \quad f'(\alpha_2) < 0.$$

Nous généraliserons cette remarque dans le paragraphe 5.1.3.

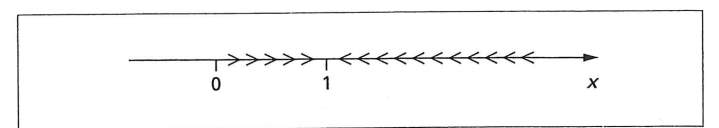


Figure 8 – Portrait de phase dans un modèle avec rappel

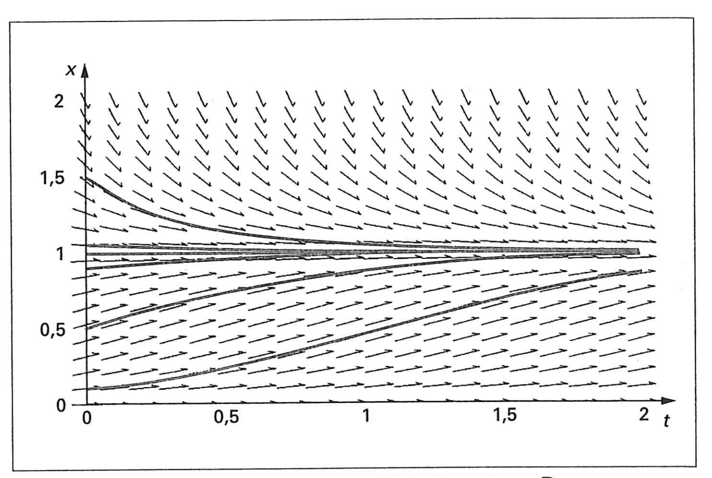


Figure 9 – Trajectoires d'un modèle biologique dans $\mathbb{R}$

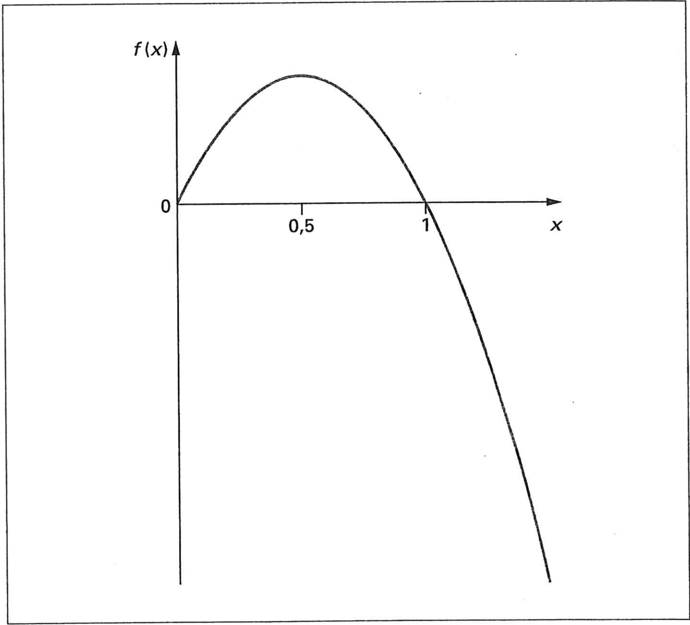


Figure 10 – Graphe de la fonction logistique f

5.1.3 Stabilité asymptotique des équilibres

Nous considérons à nouveau l'équation autonome :

(E) $$x' = f(x),$$

où f est une application de classe C^1 d'un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, vers $\mathbb{R}$. Notons Z l'ensemble des points où f s'annule, Z^+ celui des points où f est strictement positive, Z^- celui des points où f est strictement négative. Soit α un élément de Z.

Proposition 4.

Dans les conditions précédentes, on a les assertions suivantes.

- *Si $f'(\alpha) < 0$, α est un équilibre asymptotiquement stable. Soient $]\alpha', \alpha[$ et $]\alpha, \alpha''[$ les composantes connexes de $J - Z$ dont α est une extrémité. Le bassin d'attraction de α est alors $]\alpha', \alpha''[$.*

- *Si $f'(\alpha) > 0$, α est un équilibre asymptotiquement instable. Son bassin d'attraction est réduit à $\{\alpha\}$.*

- Si $f'(\alpha) = 0$, *α est un équilibre asymptotiquement stable si, et seulement si, α est extrémité gauche d'une composante connexe de $J - Z^+$ et extrémité droite d'une composante connexe de $J - Z^-$. Le bassin d'attraction de α est alors la réunion de ces deux composantes connexes et de $\{\alpha\}$.*

Preuve. ◇ Nous prouverons le premier point, les deux autres étant très analogues.

Si $f'(\alpha) < 0$, il existe un voisinage à gauche épointé de α sur lequel f est strictement positive. Soit $]\alpha', \alpha[$ la composante connexe de $J - Z$ contenant ce voisinage. Reprenons les notations du paragraphe 5.1.1 ; l'intégrale qui définit F est divergente en α^-. Par conséquent, $F(]\alpha', \alpha[)$ contient $[0, +\infty[$ et F tend vers $+\infty$ en α^-. Donc F^{-1}, c'est-à-dire la trajectoire x, est définie sur $[0, +\infty[$ et tend vers α^- en $+\infty$.

Un raisonnement analogue à droite montre que $]\alpha', \alpha''[$ est inclus dans le bassin d'attraction de α.

D'un autre côté, les orbites qui ne sont pas l'un des deux intervalles $]\alpha', \alpha[$ ou $]\alpha, \alpha''[$ sont à une distance strictement positive de α. Les trajectoires correspondantes ne peuvent donc tendre vers α. ◇

5.1.4 Exemple de système dynamique avec paramètres

L'étude de la prédation d'un épicéa par des larves conduit, après normalisation, à proposer comme modèle d'évolution de la population d'arbres l'équation différentielle autonome :

$$\text{(E)} \qquad x' = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2} = f_{r,k}(x).$$

Les réels strictement positifs r et k sont des paramètres qui vont ici nous intéresser au premier chef. La normalisation a permis de réduire le nombre initial de paramètres de 4 à 2, sans toutefois les supprimer complètement.

5.2 Systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}$

5.2.1 Généralités

Soit f une application continue d'un intervalle J de $\mathbb{R}$, vers J. Pour u_0 dans J, on considère la suite u telle que :

$$u(n) = f^n(u_0).$$

Nous nous intéresserons ici particulièrement au comportement asymptotique de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$. Remarquons, d'abord, que si la suite u converge dans J, sa limite α ne peut être qu'une position d'équilibre, par passage à la limite dans l'égalité :

$$u(n+1) = f(u(n)).$$

Un équilibre symptotiquement stable (appelé encore **point fixe attractif**) ou instable est défini comme dans le cas des systèmes dynamiques continus. L'ensemble des u_0 tels que $(u(n))$ tende vers α est appelé bassin d'attraction de α.

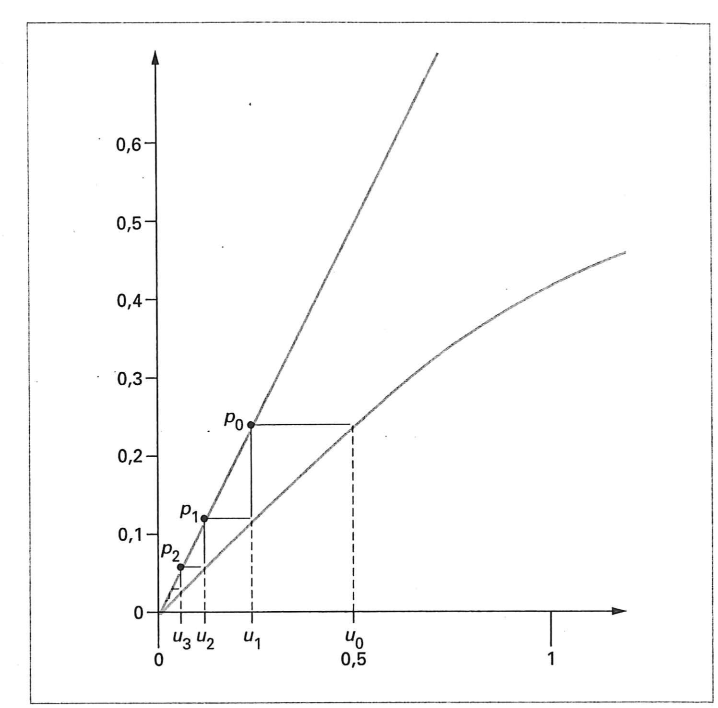


Figure 11 – Visualisation de l'orbite d'un point

La recherche de points fixes est souvent un préalable à l'étude d'un système dynamique discret. Notons à ce sujet le résultat élémentaire suivant.

Proposition 5.

Soit f une application continue de source le segment J, et à valeurs réelles.

- *Si $J \subset f(J)$, f admet au moins un point fixe dans J.*

- *Si $J \supset f(J)$, f admet au moins un point fixe dans J.*

Preuve. ◇ Posons $J = [a, b]$, avec $a \leqslant b$ et $\phi(x) = f(x) - x$.

Dans le premier cas :

$$\phi(a) \leqslant 0 \text{ et } \phi(b) \geqslant 0,$$

donc ϕ s'annule entre a et b.

Dans le second cas, soient $c \in J$ tel que $f(c) = a$ et $d \in J$ tel que $f(d) = b$. On a :

$$\phi(c) = a - c \leqslant 0 \text{ et } \phi(d) = b - d \geqslant 0,$$

donc ϕ s'annule entre c et d.

◇

Pour étudier un système dynamique discret dans $\mathbb{R}$, il est souvent commode de faire figurer le graphe de f, ainsi que la première bissectrice. Les points d'intersection correspondent aux équilibres. Partant d'une valeur u_0, on peut placer les valeurs $u(n)$ en remarquant que $u(n+1)$ est obtenu en projetant le point P_n sur l'axe des x.

La figure **11** correspond à $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ et $u_0 = 0,5$.

5.2.2 Cas des applications strictement monotones

Nous étudions dans ce paragraphe un cas particulièrement simple, celui où l'application f, toujours supposée continue, est une bijection d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ sur lui-même ou, ce qui revient au même, une application strictement monotone. En réalité, cette situation correspond à un système dynamique discret dont l'intervalle temporel est $\mathbb{Z}$ (cf. § 4.2).

Pour la commodité, nous étudierons le cas où J est ouvert, le cas général étant obtenu par de légères modifications des raisonnements.

Cas d'une application strictement croissante

Nous notons Z l'ensemble des points fixes de f; soient u_0 un élément de $J-Z$ et I la composante connexe de $J-Z$ contenant u_0. On constate que I est stable par f. En effet, soit $x \in I$; notons $\alpha = \sup I$.

Si $\alpha = +\infty$, on a bien sûr $f(x) < \alpha$.

Si α est un point fixe de f, $x < \alpha$ implique :

$$f(x) < f(\alpha) = \alpha$$

car f est croissante.

Enfin, si α est un réel qui n'est pas un point fixe de f, c'est que $\alpha = \sup J$, et comme $f(J) \subset J$, on a encore :

$$f(x) \leq \alpha \quad \text{ou} \quad f(x) < \alpha$$

selon que α est dans J ou non.

On raisonne de même avec le borne inférieure de I.

Sur I, $f(x) - x$ ne s'annule pas, donc on a toujours :

$$f(x) > x \quad \text{ou} \quad f(x) < x.$$

Dans le premier cas, on voit par récurrence que la suite u est strictement croissante et, dans le second, qu'elle est strictement décroissante.

Plaçons-nous dans le premier cas. Si la suite est convergente dans J, sa limite α est un point fixe de f, qui ne peut être que la borne supérieure de I. Si réciproquement $\sup I$ est un point fixe de f, u est majorée, donc converge, vers $\sup I$.

En **résumé**, lorsque $f(u_0) > u_0$, la suite u est strictement croissante ; elle converge dans J si, et seulement si, u_0 est majoré par un point fixe de f, et sa limite est alors le plus petit point fixe de f supérieur à u_0.
On obtient un résultat analogue dans le cas où $f(u_0) < u_0$, en renversant l'ordre.

La figure **12** correspond à l'application f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Cette application admet l'unique point fixe 2. Pour $u_0 < 2$, la suite $(u(n))$ converge donc vers 2.

Cas d'une application strictement décroissante

L'application $g = f \circ f$ est alors strictement croissante. On peut donc étudier séparément les suites $(u(2n))$ et $(u(2n+1))$, solutions de la récurrence :

$$v(n+1) = g(v(n))$$

avec, respectivement, les conditions initiales $v(0) = u_0$ et $v(0) = f(u_0)$.

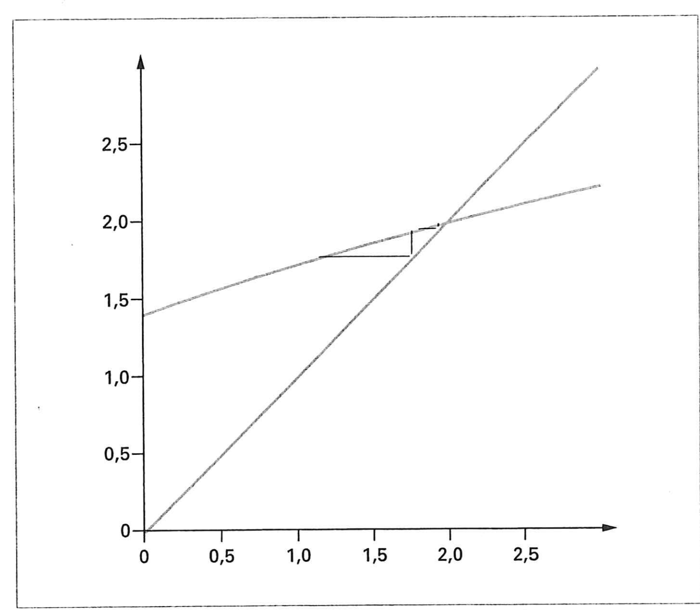


Figure 12 – Visualisation d'une orbite (f croissante)

Pour terminer l'étude, il suffit de remarquer que la suite u converge dans J si, et seulement si, les suites $(u(2n))$ et $(u(2n+1))$ convergent dans J et ont même limite.

La figure **13** correspond à l'application définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3}(4 - x^2),$$

strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Cette application admet l'unique point fixe 1. Pour $u_0 = 0$, les suites $(u(2n))$ et $(u(2n+1))$ convergent toutes deux vers 1. Donc $(u(n))$ tend vers 1.

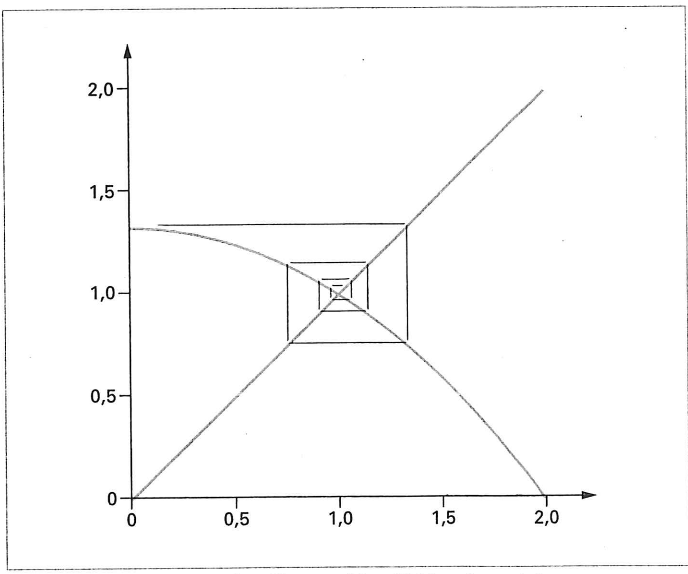


Figure 13 – Visualisation d'une orbite (f décroissante)